

講義アンケート SM2022-6 (2022年11月15日) コメントと回答

$\beta \kappa a^2 \gg 1$ としないと物理学的に意味がないのはなぜなのかがよく分かりませんでした。 $\kappa \gg 1$ とし
てはなぜ意味がないのか? となりました。今日の授業も面白かったです。

次元がある量だと、単位つきなので、大きい、小さいが議論できないですね。例えば、1cm が大きい
とか小さいとかは、他の何か「長さの次元をもった量」と比較して意味があるわけです。原子スケールを
議論しているとき、原子の大きさ 10^{-8} cm に比べて、1cm というのは途方もなく大きいですし、地球
規模の現象を議論しているとき、地球の直径 10^9 cm に比べて無茶苦茶小さいですね。そういう話で
す。

私は添え字の上下はあまり気にしてないです。

パラドクスのところで量子力学の重要性を感じました。

何気ないところに量子力学が潜んでいるのは面白いですね。

ばね定数の話で、古典的な連続バネと量子力学的な調和振動子の違いをさらに強いバネと形容していま
しましたが、これは定性的な説明としては結構納得がいくと思いました。連続的にエネルギーをとれる古典
的なバネに対して、離散的にしかエネルギーをとれないために硬くなっているバネというイメージは端
的に描像の違いを表していると思えました。(こう書きましたが理解が間違っていたら教えていただきた
いです)

そうですね。描像というのは難しいですが、離散的になったエネルギー幅が $k_B T$ に比べて大きくなる
ことでエネルギーが分配されなくなる、というのでよいような気がしますね。(自信はないですが)

むずかしい。ついていけなかった。

全体の流れなのか、式変形の論旨なのか、具体的な計算なのか、どこがついていけないのか分ければいい
のですが・・・。

講義ノートで書いてある § のところを板書でも書いてもらえると、いま何の説明をしてるのか理解しや
すくなるかもしれません。ご検討願います。

はい、そうします。ノートに書いてあるから省略しましたが、書くようにします。

分配関数のように、定数扱いのものに関数という名前をつけることがたまにありますね。仕事関数もそ
うでしたが。

数学的には、単なる規格化定数なのですが、それが重要な役割を果たすので名前がつけられています。29日の講義で、分配関数が熱力学関数と直接つながることが示されます。

Zの分母に $S_B(E_{\text{tot}})$ が出てくるのが、なぜか計算が合いません。

ああ、すいません。寝ぼけていました。 $\exp(S_B/k_b)$ です。今回のノート page 5 に修正とともに、規格化定数との関係をかきました。

有次元量が無限大になったらダメなのは何か教えてください。真数や指数も無次元量でないといけなかった気がするのですが、これもなぜか教えてほしいです。

有次元量の大きい、小さいの話は上で書きました。(厳密にいうと、Vを無限にとる、という言葉は常につかっているのですが、それは、原子の大きさを単位にとって、というのが陰的に省略されています。) 例えば、 $\exp(\text{有次元量})$ となると、その量の次元が決まらないから、そうなることはないのです。

高校の時、近似(高校ではほとんどが1次近似です)するときは必ず無次元微小量を作ってからやるんだ、と教わったのですが、いまでも理由がよく分かっていなくて、 \ll のような大小関係から近似で項を落とすときの次元の扱いがよく分かっていません。教えていただけませんか。

高校できちんと習ったのですね。無次元化しなくてもいいのですが、同じ次元をもった量で展開する、のが大事です。その場合、例えば、 x という次元をもった量を $x = x_0 + x_1 + \dots$ と展開するとき、 $|x_1| \ll |x_0|$ なら、 x_0 に比べて x_1 が無視できる、ということになります。それを $x = x_0(1 + x_1/x_0 + \dots)$ と展開すると、無次元量に関する展開になっていて、1 に比べて無次元量 $|x_1/x_0|$ が小さいなら、その寄与が無視できる、ということになります。条件でかけば、必ず、無次元量の関係になりますが、同じ次元を比べている限り問題ではありません。

運動エネルギーの例ではカノニカル分布を掛けて積分していますが、どの分布を使って平均を取るかは どうやって決めるんですか？

設定です。今の問題では、系がカノニカル分布に従うとする、という条件で求めました。そして、温度一定の環境に置かれた系に対しては、ミクロな自由度がカノニカル分布に従う、というのが講義前半に示したことなので、その条件があれば、カノニカル分布で期待値をとればよいです。

Zが $\Sigma/N!S$ (添字略してます)とも $\int d\Gamma e^{-\beta H}$ とも表せるのは、不思議というほどでもないですが、一見同じには見えないなと思いました。

ああ、すいません。ノート 5page ()にある式でしょうが、分母の S は $\exp(S_B/k_b)$ の書き間違いでした。この表現と規格化因子を直接計算したのが等価であることは29日の講義メモに書かれてい

ます。

熱力学でいう等温環境の設定のもとでカノニカル分布の導出をしたと思うのですが、カノニカル分布と等温環境は関係があるんですか？

はい。等温環境での系の確率分布がカノニカル分布ですし、カノニカル分布から、等温環境で役に立つ熱力学の基本関係式 $dF = -SdT - pdV$ が導かれます。(29日の講義。)

自分は目上の人に質問するときテンパるので、ゆっくり質問をまとめられるこういう仕組みはとても助かります。

はい。それはよかったです。ゆっくりまとめて質問をくださればよいと思います。

今まで自由度という言葉なんとなく使ってきたのですが、きちんとした定義を知りたいです。

未定義でしたね。力学状態の場合、各粒子の位置または運動量の各成分を1自由度として数えます。つまり、運動方程式を1階の微分方程式で書いたときの変数の数のことを「自由度の数」として数えます。

講義ノート補足の、 $Z = Z_c \times Z_k$ の添字 c と k は何の頭文字から取ってますか？ k は kinetic でしょうか。

(r_1, \dots, r_N) という配置空間 (configuration space) の分配関数という意味で、 c を使いました。 K は運動量空間の分配関数ですが、kinetic part という意味で k とかきました。

ガウス積分が主要な寄与になる条件など、細かいところは分かりませんでした。

講義メモの後半に書かれていることをみれば、わかるかもしれません。いわゆる、鞍点法の計算と基本的に同じことをしています。(同じ計算は後ででてくる予定です。)

規格化因子 Σ が意外とあちこちの式に出てくるなあと思います。

そうですね。29日もできます。