講義アンケート SM2022-5（2022 年 11 月 8 日）コメントと回答

今日の内容はよく理解できた。次週以降に繋げたい。

それはよかったです。

P(m=m)について対数をとっても式が複雑になりそう…と心配したが、最後はとてもシンプルになって気持ちよかった。N=(1+m)/2+(1-m)/2 のような変形がスラスラできるようになりたい。

気持ちいいですね。打ち消すための式変形は、手抜きのためにやっているだけで、本質的ではないです。最初は丁寧に愚直にやるのがいいような気もします。

課題結構難しかったです…
テストと課題の難易度は同程度でしょうか？

そうですか・・。似たようなレベルかやや難しい問題が含まれていると思いますが、難しい問題の配点は低く、基本事項が理解できていれば合格点を超えるし、過去問等である程度なれていると８割を超えれると思います。

統計力学を主に将来研究するとしたら、どんな問題や課題が開かれているのでしょうか。授業に関係なくてすみません

平衡統計力学の問題なら、凝縮系理論や素粒子、ハドロンなどの問題で、特に、量子多体系の現象の解明でしょうか。現在では、対象が拡大されていて、例えば、生物系、経済社会系、機械学習などが「統計物理」の範疇で議論されています。１回目の講義のときにも説明しましたが、僕は、究極的には、生物ができてきたあたりのダイナミクス、認知や計算を物理的過程から理解することなどに興味をもっていました。今でも問題だと思います。ミクロとマクロをつなぐ基礎的な問題なら、非平衡状態に対する議論が活発に研究されています。等重率の原理が成り立たないので、平衡のときみたいなガイドラインがないのですが、各論的なところから攻めるしかないのですが、ある程度制限するにしても新しい体系ができればいいな、と思っています。統計物理の分野状況は、例えば、３年に１回開かれる IUPAP 主催の会議の Statphys のトピックスとかをみればいいかもしれません。（コロナで１年延期して）２０２３年は東京であります。https://statphys28.org/index.html

物理があまり出てこなくて退屈でしたが、我慢して復習しようと思います。

そうですよね。難しいところです。（物理に関わる）公式の連発ですすむと、計算の海に溺れる人がでる

と思って、一回ひらきなおって計算回をつくりました。それでも、(最後に触れましたが)、大偏差関数と熱力学関数の関係に思いをめぐらすと「物理」が関わりも少しは感じられるかと思います。ちなみに大偏差関数を熱力学関数と結びつけたのはアインシュタインなのです。(その頃は、大偏差関数という言葉はなかったですが。)

統計力学の読み物少し読みました。数学ガール好きなので面白かったです。

楽しんでいただけて何よりです。スマホで連絡とれる今の時代でなくて、友人たちと出会うのも「偶然」なのだけど、それでも、会いたいと思ったときに会える、という４０年前の香とか今から思えば不思議ですね。

エントロピー不変が出てくる対称性の研究、プランク定数が出てくるの面白いですね、ドキドキしました。

ありがとうございます。僕も驚きました。きっと深い意味があると期待しているのですが、まだよく理解できていないです。

補講は予定合わなければオンデマンドとかでも全然 OK という気持ちです。

うぬぬ・・。検討します。

先生の Twitter 見てます。ミクロカノニカル分布について何か分かったんですか？

ミクロカノニカルという言葉は、ギブスが教科書（１９０２）に書いたのが最初なので、その教科書をパラパラみていました。彼の論法は独特で「ミクロ」の意味ははっきり分からないですが、本の後ろの方で、ミクロカノニカル（による平均）＝時間アンサンブル（による平均)、という講義でも説明したことに相当を書いていました。それが分かっていた上で、カノニカルから説明を始めるのはどういうことか、謎ですね。

ミクロカノニカル分布の他にも分布を紹介してもらえると、比較して上手く捉えられるようになるかもしれないのでお願いします。

はい。これから色々でてきます。むしろ、そういう色々な分布を使いこなすのが統計力学のひとつのアプローチでもあります。(また、でてくる色々な分布が、熱力学の完全な熱力学関数が色々あることと対応しています。)

熱をどう捉えるのかが楽しみです。熱力学では、エネルギーの移動形態のうち仕事ではないもの、という消去法的な定義だったと思うのですが、仕事は力学的な概念なのでミクロな力学法則からどうにかなり

そうですが、熱はどうするんだろうと思っています。

熱力学における熱の定義は、(僕の本では)、マクロな仕事をされない部分系(熱浴とか、固定系とか)へのエネルギー移動で定義されます。仕事される部分系同士のエネルギー移動では、熱と仕事の割り当ては定義できない、という立場にたっています。例えば、透熱可動壁で熱接触されながら動く系についてエネルギー移動の分解はできない。統計力学の場合も、基本的には同じです。特に、断りがない限りで、統計熱力学の熱は「熱浴」へのエネルギー移動だけです。そして、熱浴は15日の講義で定義します。

コイン投げの m ハットに対応するのってハミルトニアンですか？どの量がどの量に対応するか教えてもらえると有り難いです。次週の内容ですかね？

講義中にときどき口走っていましたが、先週の内容に関係づけると、¥hat m はハミルトニアンです。また、12月にでてきますが、コイン投げの例題は、とある物理系の問題と等価なのです。

「最も確からしい値」というのは「その値以外では N→∞で確率が 0 に近づいていく値」という説明がありました。この場合 0 への近づき方は指数関数的である必要は無いんですよね。それでも講義で扱った例ではどれも指数関数的に 0 に落ちていく数学的な背景は何だろうと思いました。大数の法則が背景だとちらっと仰っていたように思いますが。統計力学で出てくるのは指数関数的減少が大半なんですか？だとすると「勝負は指数関数の肩で決まる」というのも気分は分かるのですが。

はい、そうです。もっと厳密にいうと、「もっとも確からしい値」は大数の法則で表現される言葉で、指数関数的に近づく、という大偏差性質はそれよりも強いです。数学的には、大数の法則を示すのは(弱い方なら)簡単ですが、大偏差性質を示すのは面倒です。(確率論としての数学的背景については、専門外なので分かりません。)しかし、自然現象の多くの例で、マクロな変数が大偏差性質をもつことが知られており、かつ、その大偏差関数が物理としても重要な役割を果たします。統計力学では、大偏差性質を(証明できなくても)前提にして色々なことを議論するのが標準的です。それを認めてしまえば、指数関数の肩の簡単な計算だけで漸近的な振る舞いが分かることになります。

とても面白い講義で毎回楽しみにしています。

ありがとうございます。励みになります。

添え字を上につけたり下につけたりするのは気分の問題ですか？それともこういう量は上付き、のような慣習があるんですか？

あぁ・・。Twitter でも指摘されていましたが、疲れ果てて、一貫性がなかったですね。フリーハンドで書く弊害かもしれません。テンソル解析のように反変・共変の規則があるわけではなく、意味論的に区別がつけばいいだけです。

漸近解析なる分野があることを初めて知りました。

あれ、漸近展開という言葉は、１回生の微積ででてこなかったですか？　漸近解析は、例えば、https://en.wikipedia.org/wiki/Asymptotic_analysis

「勝負は指数関数の肩で決まる」の「勝負」ってなんですか？0 に近づくか否かってことですか？それから崩壊している本もあるとおっしゃっていましたが、どういう論理展開をしようとして破綻しているのですか？

勝負というのは、「計算する」あるいは「評価する」のを「勝ち」として、できないのを「負け」というときの勝負です。漸近的な振る舞いは、指数関数の肩できまる、ということをインフォーマルにいってみました。崩壊している論旨とは、指数関数の肩で評価することを明示的にせずに、そのまんま向かい合って、何か近似らしいことをこねて、最後には既知の結果にいっているけれど、途中の計算の根拠は完全に間違っているような話です。

復習しながらこの欄を書くのが水曜日の楽しみになっています。

書いてくれると僕も嬉しいです。

変わったコイン投げの例、最も確からしい値は J の導関数が 0 になる値として得られるとなっていますが、J はいつも軸に一点で接するようなグラフになっているのかな？と思いました。

J に特異性がなければ、J の微分がゼロのところで、J は最小になって 0 になります。その意味で、いつもそうなります。一般には、J は最小値がゼロで、下に凸の関数です。（統計力学では、相転移という特異性を扱うので、微分可能性を要請することはできないのですが、その場合、凸性が重要な役割を果たします。）

操作的定義を採用する利点・欠点はなんですか？本を書くとき、操作的定義を採用するかしないかは何で決めますか？科学としてふさわしいのはどちらかとかそういうこととは関係ない話ですか？

天下り的定義がなくなるのが最大の利点だと思います。一方、実際に使う際には効率的でないですね。何を伝えたいか、ということですかね。統計力学の本書きたいという希望をもっているのですが、講義の方針で定義する一方、様々な定義、アプローチとの関係も議論できたらいいかな、と思います。科学としては、一貫していれば何でもよいかと思います。

孤立系は「外とエネルギーのやりとりが無い系」のことでしたっけ？

はい。エネルギーや粒子数など外部といかなりやりとりがない系です。

変分原理の理解が怪しいです。「ある量Sの引数を仮想的に δ だけずらしたときに、変分 δS が0になる、すなわちSが最大や最小になるような状態が実現する」という原理であってますか？

熱力学の「エントロピー最大原理」のことなら、「断熱環境において、拘束されていない熱力学変数があるならば、平衡状態におけるその変数の値は、全エントロピーを最大にするものとして与えられる」ということです。したがって、拘束されていない熱力学変数（例えば、二つの箱のエネルギー配分など）を少しずらしたときに、エントロピーの変化はゼロ、ということになります。

前回のアンケートに関連して。熱力学の変分原理が等重率の原理から導け、それに対応しているというのが分からなかったです。いや、言っていることは分かるのですが、対応関係がきちんと理解できなかったということです。ちなみにここで言う変分原理はエントロピー最大原理のことを指していますか？最小仕事の原理などいろいろ出てきて熱力学がよく分かっていません。

１１月８日の講義の最後に少し紹介したことですが、１１月１日の計算を（ボルツマン公式の）エントロピーをつかってかくと、１１月８日の大偏差関数がエントロピーと関係づくことがわかります。そこで、大偏差関数が最小になる、という性質がエントロピーが最大になる、ということが等価になります。熱力学には様々な変分原理があります。等温環境では、（ヘルムホルツの）自由エネルギーが最小になるように拘束されていない変数は決まります。この変分原理に対応する大偏差関数による表現もあります。最小仕事の原理は、変分原理とは違っていて、仕事についての不等式ですね。（佐々の熱力学入門を買って勉強してくれれば・・）

「熱力学―変分原理―統計力学―力学 というラインは、古典（解析）力学―変分原理―経路積分―量子力学 というラインと同じ構造になっています。」というのが面白そうで理解したいですが分かりません。統計力学の「等重率の原理」から熱力学の変分原理が導けるというのに対応して、経路積分の「？？？の原理」から古典(解析)力学の「最小作用の原理？」が導かれる？？？

量子力学において確率振幅を作用 x 虚数単位/プランク定数を指数関数の肩にのせて経路積分で表現することができます。この経路積分で古典極限を考えると、寄与が最大になるのが古典軌道になるのですが、それが作用を最小にするものになります。これが最小作用の原理です。量子力学を勉強するとすぐにでてきます。

冷水と熱湯を混ぜるとぬるま湯になるが、ぬるま湯が冷水と熱湯に分かれることはないというような話に関して、熱力学の立場では、そんなことは経験的にあり得ないからそれに沿った原理を設定しよう、確かにマクロな実験事実が説明出来るからこれでOK、なんであり得ないかには踏み込まない、と考えて、統計力学の立場では、一応あり得るけどNが大きいと確率がとんでもなく低くなるから実質無いと理解できる、という理解であってますか？

統計力学では、「ぬるま湯が平衡状態にあるとして、等重率の原理を仮定すれば、冷水と熱湯に時間変化で分かれる確率はNが大きいときに限りなく小さくて観測されない」となりますし、（それを示すことは学部生の範囲でもできます。）しかし、「そのぬるま湯が冷水と熱湯を混ぜてできたものだとするならば、そして、最初の冷水と熱湯のそれぞれに等重率の原理を仮定して、あとは、粛々と時間変化するとするならば、そのゆるま湯の状態では、等重率の原理を適用できないこともすぐに分かります。そうすると議論が難しくなります。これについては、現在でも研究をすすめているところです。

温度の定義の講義で、理想気体を基準物質に使ったということは、単原子分子希薄気体が入った B の箱は温度計の役割を果たしていたということですか？

はい、そう考えてよいです。