

講義アンケート統計力学A 第4回 回答 2022年11月1日

補講はされない予定ですか？僕は先生の講義好きなので補講歓迎なのですが！

ありがとうございます。補講期間がものすごく少なくて、タイミングがあうかどうかわからないのです。一回休講になってしまいましたが、内容的には全て終われると思います。

途中の計算はついていけなくなりましたが、最後エントロピーが自然に定義できたところや、温度や圧力が高次元空間の体積で表せるところはすごいなーと思いました。ボルツマンの公式が導出されたのが面白かったです。この式を出発点にする本も、多少は納得して読めそうです。

よかったです。使うときには、ボルツマンの公式を認める立場でいいと思いますが、圧力と温度を高次元空間の体積で書けることから、ボルツマンの公式が理解できるのは「感動ポイント」のひとつだと思っています。(が、それを明示的に書いている本が(少)ない。)

しばしば出てくる「操作的」や「作業仮説」という言葉の意味を教えてください。講義からは外れますが、「現象論的」という言葉の意味も教えてください。

あ、つい、口走ってしまいましたかね。「操作的定義」というのは、「ある量を実験によって定義する」ということです。「温度」とは何か、というとき、「 $S(E,V,N)$ の E に関する微分の逆数」という定義をとるのでなく、「熱接触させたときに等しくなる」「理想気体温度目盛りを使う」という実験でも使える条件で定義する、ということなのです。

「作業仮説」は、ある理論をくみだてるときに、ある「仮設」を設定してみて、このあとの理論的展開をみるときに使う言葉だと思います。

「現象論」は難しいです。人や研究分野によって全く違う使われ方をします。還元的方法で対象とする系の構成要素を調べることに對して、系そのものの様々な現象の関係を整理することを指す、というのが僕の使い方です。

その場で質問できる人はすごいなーと思います。自分は家で整理しないと疑問点が浮かび上がってきません。自分がどこまでは分かっていて、どこで詰まっているかを明らかにするのはなかなか大変です。

色々なタイプの人があるので、他人は気にしなくていかと思います。自分がどこまで分かっ

ているか、を分かるのは大変です。ゆっくりでいいかと思います。家に帰って、整理したり、反芻したりしていると分かることも多いです。また、それとは別に、その場で（わからないままに）声に出していると、次第にわからないことがわかってくることもあります。

温度の導出におけるその前提や原理、途中に出てくる考え方や式変形、そして結論として導出された関数が確かに温度の条件を満たしていることを理解している状態をもってして「温度の考え方」を理解していることになるのであればある程度理解していることになるかもしれませんが、なぜ確率分布を最大にする u についての変微分方程式が温度の導出に繋がるのかが感覚的には自明に思えていないため、そういう意味では理解していないかもしれません。

この感覚の部分を最初から持つことはないと思います。そこには、深く面白いからくりが潜んでいます。熱力学には、（拘束されていない変数の平衡値を決める）変分原理があるのですが、その変分原理を等重率の原理から出すことができます。実は、それをやったことに相当しています。この 熱力学—変分原理—統計力学—力学 というラインは、古典（解析）力学—変分原理—経路積分—量子力学 というラインと同じ構造になっています。そういう諸々などの経験を通して、次第に感覚的にわかってきます。

一連の議論において、何を仮定として進めるかが重要だと感じた。ボルツマンの公式、統計力学におけるエントロピーについて、他の本と比較しながら理解していきたい

そうですね。ある科目を勉強するとき、色々な本をみるのはいいと思います。一冊をちゃんとやれ、という人もいますが、ぼくは理解力高くなかったので、大概、何冊も横において勉強していました。「何を仮定して、何が結論されるのか」という論旨の連鎖をしっかりと理解するのが大事だと思います。

講義メモ 2 ページ目のⅢの高次元相空間というのは、位相空間のことですか？相空間という呼び方もあるということですか？

ああ、すいません。Γの座標で書かれた空間を phase space とよぶのですが、日本語では、相空間または位相空間とよびます。ただ、位相空間というと数学の topological space と完全に混乱するので、僕は、相空間とよんでいます。説明してなかったですね。次でたときに補足します。

講義メモ 3 ページ目の、基準物質 A^* を決めるという要請がどういうことか分からないので教えてほしいです。というか熱力学で温度をどう導入したか忘れてしまいました。温度計で

測られる、実験的に決まる量として導入したところまではわかりました。なにが要請されてるんでしたっけ、、、？

熱力学では、熱平衡（接触させたときに到達する平衡状態）で等しくなる量として（経験）温度が導入されます。これだけだと目盛りの任意性があるので、目盛りを決めるのには、何かの基準物質での変化に反映させる必要があります。温度計とは、「温度」をその物質の体積変化で読み取る数値であって、基準物質として温度計の物質をもってきたことに相当します。（ガリレオが最初といわれています。）講義では、その基準物質として、理想気体を使って、その物質に対しては、エネルギーと温度（理想気体温度）の関係は前提にしました。

要請 2、単原子分子希薄気体のときの T の関数形を与えたのは、我々の知っている理想気体温度と関係づけるためだという説明がありました。この要請を無くしても、あるいは違う関数形を与えても、我々に馴染みのない温度を用いた統計力学の体系が成立するということですか？ T の不定性を馴染みのあるように決める、という要請 1 に比べてあまり根本的でない要請の感じがしているのですが誤解でしょうか？

はい。別の温度を使っても、統計力学、あるいは、熱力学は成立します。ただし、理想気体温度は、熱力学において、別格の特徴づけがされています。カルノーの定理によって、温度計の目盛りを与える物質の選択に関係ない「絶対的な温度目盛り = (絶対温度)」をエネルギーで与えることができます。この絶対温度を具体的に求めると、理想気体温度に比例することが分かります。つまり、この絶対温度は目盛り間隔の選択の任意性を除いて一意であり、目盛り間隔を水の沸点と凝固点から決められた便宜にしたがった選択にあわせると、理想気体温度は絶対温度と考えることができます。この知見を踏まえたのが要請 2 です。質問を受けて考えたのですが、(熱力学による) 絶対温度の定義に相当することを要請 2 として統計力学の範囲で仮定して、理想気体温度が帰結されるのが論理的には綺麗ですね。考えます。

熱力学極限の話で、 V 固定で $N \rightarrow \infty$ とするとまずいのは何故ですか？何故 E/N と V/N を固定したんですか？

V 固定で N 無限をとると、箱の中に無限密度の物質ができてしまいます……。マクロな物質では、密度は決まった値をもっているのですが、ミクロな世界から考えるとき、その密度の値を固定して、 N 無限の極限をとるのが、マクロ系の正しい再現になっているわけです。

最低限の定義から温度の式が導出されたのが面白かったです。 $o(N)$ が省略せずに書かれていたので、極限をとった上で温度について考えているのがしっくりきました。

温度の概念は、熱力学極限が必要なのですね。小さな N について、温度を（形式上）定義することは可能なのですが、有用な定義が一意に定まっているわけではないので $s y$ 。

出来れば講義の話す速さをもう少し落としていただけるとありがたいです。

今回は、詰込みすぎの回だったので、3割くらい早かったかもしれません。（休講を挟んでしまって）今回中にボルツマン公式まで到達する必要があったので・・・講義全体の構成を工夫して、こういう回がないようにしたいと思います。

前回の範囲の、

$\Omega = \int d\Gamma \theta(E - H(\Gamma)) = \int d\Gamma 1(H(\Gamma) \leq E) =$ 等エネルギー面 ($H(\Gamma) = E$) で囲まれる $6N$ 次元空間の体積

という式で、なんで「 $H(\Gamma) \leq E$ となる領域での積分」が「等エネルギー面 ($H(\Gamma) = E$) で囲まれる $6N$ 次元空間の体積」になるのかが分らないです。 $H(\Gamma)$ は Γ 空間内で単調増加なのでしょう。等エネルギー”面”だけど ($6N - 1$) 次元”空間”だからイメージが掴みにくいです。

高次元空間をまじめにみるのは難しいですね。3次元空間の2次元面の場合を理解して、その一般化だと考えるのだと思います。厳密には、エネルギー面の幾何学に依存しますね。エネルギー面が閉じていて、エネルギー面の値 E で相空間 (Γ 空間) を輪切りにしたときに、 E について単調になっている、という状況を前提にしています。具体例で確認しながら使うのが堅実です。

温度の満たすべき条件を要請して温度及びエントロピーを導入するという流れが純粋にミクロからの演繹という感じがして面白かったです。

はい。その醍醐味を味わってもらえると嬉しいです。

前提はわかるし結論もわかるけど計算が難しかったです。ノートを見返して計算を追いきたいと思います。

初見では、計算は難しかったと思います。これから同じような計算が繰り返してできますので、次第になれてくると思います。

前回の圧力公式で \log を使った形にした理由がわかってよかった。

あ、そうですね。前回、log にしたのは、今回を見越した上でした。

統計力学のスタンスがまだ分かってないのですが、等重率の原理を置いてミクロな力学からマクロな熱力学を導出しようとしているのですよね。今回温度を定義したみたいに熱やその他の概念もミクロな力学から捉えて、関係式が全部出てくるんですか？

講義でも熱浴はすぐに定義されます。そして、熱を熱浴へのエネルギー移動と定義した場合には、熱が定義されます。熱力学第2法則も（制限された状況で）統計力学によって導出されます。ただ、熱浴以外の部分系のエネルギーのやりとりで、「熱」と「仕事」を分けることは明瞭ではないですし、第2法則のミクロからの表現も未開拓な部分が残っています。

講義中に出た質問の答えも何かしらの形で残しておいて欲しいです。今日の授業では計算を追っていくので精一杯だったので、講義の最後に出た質問まで理解することができませんでした。

ああ、これは確かにそうなのですが、質問を全部覚えきれていないのでどうすればいいかな。（若いときなら全て覚えていたと思うのですが・・・）検討します。

講義メモのスライドの8ページ目の ρ_A の計算で、下から2番目の式が成り立つのがよく分からなかった。

下から3行目の式を冒頭の式に代入します。 Γ_A を含む δ 関数と Γ_B を含む δ 関数の積になっているので、それぞれの積分を独立にすることができます。その形に書いたのが下から2番目の式です。

この欄で質問に答えてもらうにはいつまでに提出してください、というのはありますか？ カノニカルって正規のという意味なんですね。ミクロカノニカル分布は微視的正規分布という感じですか。

金曜日12:00くらいでしょうか。ミクロカノニカルの語源は分からないのです。その言葉のオリジナルはギブスだと思うのですが、ギブスの本にも説明はないように思います。

Hamiltonian がまだじっくり捉えられていません。解析力学では、Lagrangian に Legendre 変換とかいう得体の知れない変換を施すと得られる量、または Lagrange 形式で時間並進対称性があるときの保存量を、時間並進対称性がないときも考えてみますよ、という感じで出てきた気がしますが、いまいっぴんときません。Hamiltonian も Lagrangian も自分にとっては何か知らないけ

ど考えてみると解析力学がめちゃくちゃ上手くできあがる天才が持ってきた量のままです。すこし説明してほしいです。

講義でてくるハミルトニアンは、解析力学の知識は必要なくて、力学状態 Γ が与えられたときにエネルギーの値を返す関数です。エネルギーは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和で、ポテンシャルエネルギーは働く力から決定されます。(解析力学との関係は追求すると色々面白いことはありますが、それはおいおい勉強を積み重ねてからでいいと思います。(例えば、ボルツマンの公式で与えられたエントロピーを(非一様な)時間並進のネーター不変量として特徴づける、とか、https://www.riken.jp/press/2016/20160427_2/ 最近でも発展しています。これは解析力学と統計力学を学べば学部生でも読めるようになる論文です。)

考え方、計算過程を断片的に追うことはできましたが、全体的な理解は全然できませんでした。A と B それぞれのハミルトニアン $H_A(H_B)$ とエネルギー $E_A(E_B)$ って別物なんですか？そこからもう分からなかったです。

すいません。舌足らずだったかもしれません。ハミルトニアンとは力学座標 Γ を与えたときにエネルギー値を返す関数です。エネルギー E とかくときには、その特定の値を指しています。

計算がかなりハードです

初見では難しいと思います。同じような計算がこれから何度もでてくるので、次第になれてくると思います。

$\rho_A(E_A) = \frac{\sum_A \cdot \sum_B}{\sum_{\text{tot}}}$ から、 $\log \rho_A(E_A) = \log(\sum_A / N_A!) + \log(\sum_B / N_B!) + \text{const}$ への式変形は、 $\rho_A(E_A)$ の分母分子に $1/N_A! \cdot N_B!$ をかけたのだと思いますが、分母の $\sum_{\text{tot}} / N_A! \cdot N_B!$ を \log で定数に持っていく方法がわかりませんでした。

このあたりヨロヨロになっていて、説明が十分でなかった箇所ですね。const は E_A に依存しない寄与、という意味です。 $N_A!$ を分母分子にかけて分子の部分は E_A に依存しないので、const に入れ込んでいます。

熱力学や統計力学は、この世界のあらゆる物質について議論できる点の一つの大きな魅力だと思います。私は宇宙物理に興味があるのですが、ブラックホールやダークマターについて熱力学や統計力学の観点で研究する活動は行われているのでしょうか。

ブラックホールは最初現象論的にエントロピーが定義され、そのエントロピーと熱力学・統計力学との関係は様々な観点から議論が続いています。ダークマターについては、そもそもそれが何か、というのが問題のはずなので、熱力学・統計力学との関係の議論は私は知りません。

「統計力学における温度の考え方」はわかりましたか？

31件の回答

