

講義アンケート SM2022-11 (2022年12月27日) コメントと回答

温度を説明された回のアンケートで、「質問を受けて考えたのですが、(熱力学による)絶対温度の定義に相当することを要請2として統計力学の範囲で仮定して、理想気体温度が帰結されるのが論理的には綺麗ですね。考えます。」とあって、これが思いついていらっしたら補足資料などで教えていただけませんかでしょうか。

資料はないですし、まだ紙に書いていないです。カルノーの定理を統計力学設定で示すことを念頭においていました。

”密度ゆらぎの世界”という言葉の定義があれば知りたいです。臨界現象と密度ゆらぎのつながりがまだしっくりこないです。

気液臨界点の話で β と γ を正確に予言できるような状態方程式はありますか？

位置と運動量の組を確率変数とする統計力学に対して、密度場を確率変数とする統計力学の世界があります。有効モデルとしてミクロスケールからメソスケールへとスケールがあがったものです。気液臨界点では、密度ゆらぎの相関長が発散するので、密度場の様子をみると「臨界的」な様子の特徴づけることができます。

実験の測定データから状態方程式を書き下すことはできるのですが、それは「予言」ではないですね。統計力学の分配関数を計算できれば、それが正しい状態方程式を与えると信じられていますが、厳密に積分することはできません。

くりこみ群の話面白かったです。難しくてよく分かりませんでしたけど。

学部生でも、テンソルやグリーン関数はあんまり習ってないのに出てくる概念の代表例な感じがしています。

くりこみ群は場の理論でもできますし、時間をかけて学ぶトピックです。ああ、そうですね。大学入学してすぐに、テンソルやら ∇ やらに面食らったのを覚えています。

臨界指数間の関係も面白そうだなーと思いました

はい。いくつか厳密に成り立つ関係式があります。

磁性体の式と気液臨界点の式が対応していくのが面白かったです。

そうですね。全く関係のないようにみえる現象(気体・液体、磁性体)が同じ指数でつながる、というの

は驚異的ですね。

いつも好き勝手に極限入れ替えてますが、それがここまで本質に関わってる例を初めて知りました。びっくり。

全くです・・・。

板書では M と書いていたところを、講義メモでは $\langle M \rangle$ で書いていますね。意味の違いが分かっていません。もちろん $\langle \rangle$ が期待値なのは分かるのですが、どちらで書くのが適切なのでしょうか。

磁化という物理量そのものが M 。カノニカル分布でサンプルするモデル上での磁化が $\langle M \rangle$ 。これらがイコールで結ばれるというのは等重率の原理から言える。という理解です。

ああ、すいません。微視的変数の関数は \hat{M} のように $\hat{}$ をつけて、測定量はただの M にしようとしていたのですが、その講義メモは2年前のコピーなので統一がとれていませんでした。 \hat{M} の期待値 $\langle \hat{M} \rangle$ が測定値 M を与えるのが等重率の原理の結果です。

$d=3$ のとき、 β や γ が有理数か無理数かも分かっていないとのことでしたが、有理数か無理数かが物理現象に効いてくるようなときはあるのかな、と思いました。単に数学の問題な気がしてしまって、...

臨界指数の有理数 or 無理数が現象に効くかという多分効かないと思います。(無理数であることが分かっている例が少ない。)ただ、臨界現象に限定しなければ、パラメータ値の無理数・有理数で現象が変わるというのがあります。

χ, M, T, h といういろいろ文字が出てきて何が T_c で発散するのかなどが分からなくなってきたので整理したい。磁化が2変数関数であることと、 χ が微分係数で与えられることでややこしく感じてしまっている。

関数としてみるとややこしいかもしれません。整理して納得してください。

M は上から $T \rightarrow T_c$ と近づけたとき発散しているんですか?板書では M は、 h が大きいとき発散していて、 h が小さいとき有限、ゼロ磁場の極限で T 軸に張り付いて0のように見えたのですが違いますでしょうか。

ああ、すいません。発散するのは0磁場の帯磁率です。そこから磁場がはいったときの M のグラフをかくことができます。それを発散するかのようには書いたのは適切ではなかったです。ゼロ磁場の極限では臨界温度より高いところで磁化はゼロで、低いところで磁化が有限になります。

$h=0+$ の極限で、 $M-T$ グラフの傾きが、 T_c で発散して、他の場所では有限と仰っていたと思いますが、

これは何かから導きましたか？観測されたとせよ、という話ですか？

はい。実験事実として特徴的なことを説明して、その場合は指数 β ですね。それを統計力学で説明できるかどうか、という問題設定にしました。

実際直接測定するのは磁化 M で合ってますか？帯磁率 χ を直接測定するわけでは無いですよね？

T を一定に保って、外部磁場 h を少しずつ変えながら M を測っていく。(測定方法は電磁気学の問題。) するとその温度 T での M - h 図がプロット出来る。その M - h 図の $h=0$ での傾きとして、その温度 T_1 での等温帯磁率 $\chi(T_1)$ のデータが得られるということであっていますか？

原則的にはそうです。ただ、(熱力学・統計力学の関係式を使って)、磁化よりも先に帯磁率を測定することも可能です。講義中の説明はそのアプローチが頭によぎってしまってそのように説明してしまいました。

χ - T グラフは観測されたとせよ、ということだったと思います。 M - T グラフは χ - T グラフから復元しているのですか？

すいません。このあたりの説明は不完全でした。正当な手順としては、 M - T グラフを磁場毎に測定して、そこから帯磁率を測ると考えるのが自然です。講義中は、 0 磁場帯磁率を先に測定されているとして、磁化を復元する順序で説明しました。臨界温度より高温では、帯磁率 \times 磁場から磁化がわかって、その値が臨界点で大きくなるのですが、ゼロ磁場極限ではゼロです。

「磁化は、磁場が小さいとき χ のデータからすぐ復元できる」とメモを取ったのですが、具体的な手順がよく分からず理解できていないので教えてほしいです。

上記で書いていますが、復元できるというのは正確ではなく、臨界温度のところで M の値が特異的になりえることが分かる、というのが正確でした。

外部磁場をかけたら磁化するのは、どの物質でも起こることなのですね。

磁場をかけてないのに磁化が出来ているのが磁石だ、というのがあらためて理解できて良かったです。

よかったです。

どれもこれも冪乗で収束していくのは何故なんだろうなあと思いました。

冪というのが特異性の典型的な現れ方ですね。それとは別の特異性も色々あります。

実際の研究では、プロットした(まだどんな関数かわからない)データの関数形はどうやって明らかにす

るのですか？勘あたりをつけてコンピュータにグラフを書かせていって、ぴったりフィットする関数を探していくのですか？これでは途方もない作業になってしまいそうです。

関数形として期待されるものはあるので、それをプロットする、というのが最初でしょうか。物理的考察、経験、様々な外挿領域とのマッチングなど、総合的に色々な知見を組み合わせます。

イジングモデルの μ の単位を教えてください。

外部磁場 h は磁束密度の方で考えてますか？磁場の強さの方で考えてますか？

磁場の強さです。 μH がエネルギーになる単位です。

特異な現象だからこそ、発散するかどうかなだけ見れば良い、というのがたしかになあと思いました。何から手をつければいいか分からなくなりがちなので。

そうですね。

$M=0$ の証明のところで、 σ の符号を入れ替える変換についてハミルトニアンが対称(不変)と講義メモに書いてありますね。大学に入ってから、対称性が不変性と強く関連していることを意識するようになりました。

そうですね。

Universality class って何でしょうか。。

普遍性クラス ですが、気液臨界点と Ising model が同じ仲間になる、という風に系の個性とは別に分類されるとき集合(クラス)のことです。

2017年の過去問の問題Iのiで、ミクロカノニカル分布を ρ ではなく P で書いていますね。これは今年の講義の ρ とおなじものですか？

同じです。

圧力を取り扱った回で、圧力公式は記憶なくていいことが講義が進めば分かる、と仰っていた気がします。その理由は今度の授業で紹介されますか？もう習ってはいないですか？

圧力公式の代わりに、ボルツマン公式と熱力学関係式を使えばいいからです。