統計学A Ⅸ

講義メモ

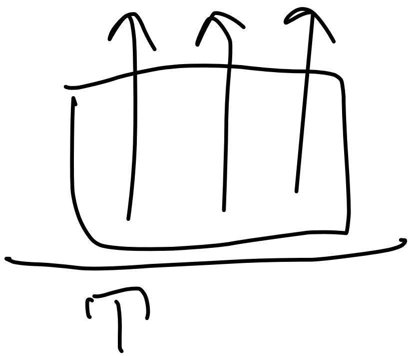
2022/12/18

§ 今日の目標

1. "有効模型" という考え方を学ぶ

2. 磁性体のキュリー則を導く...

§ 磁性体

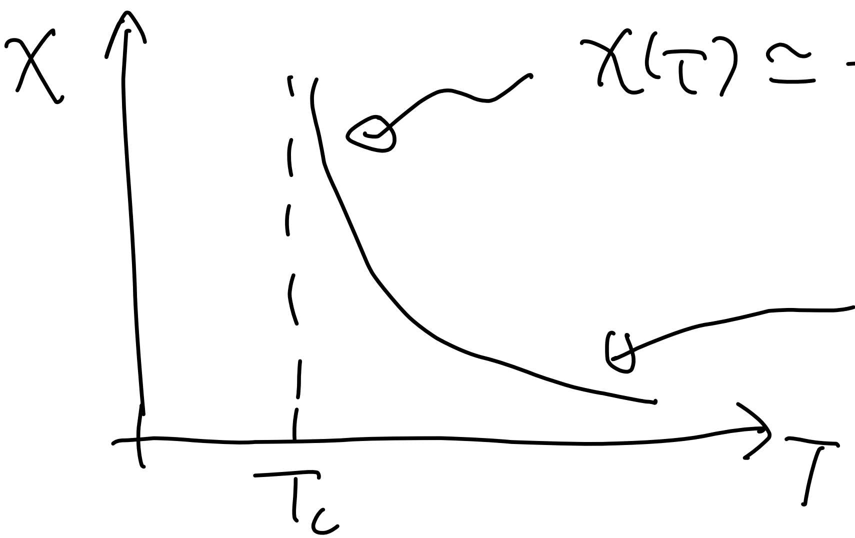


外部磁場 $\mathbf{h} = (0, 0, h)$

磁化 M : $M(T, h)$ ← 測定量 (cf 電磁気学)

帯磁率 $\chi(T) \equiv \left.\dfrac{\partial M(T,h)}{\partial h}\right|_{h=0}$

測定例：



$\chi(T) \simeq \dfrac{1}{(T-T_c)^{\gamma}}$ (発散)

$\chi(T) \propto \dfrac{1}{T}$ (キュリー則)

問： 発散やキュリー則が生じる条件？

§ ミクロへ・・・

磁化： 物質中に「磁気的な分極（～磁石）」が生じる　（マクロ現象から）

⇓

各原子の「磁気モーメント」の集まり

⇓

スピン，電荷の運動

⇓

量子電磁気学

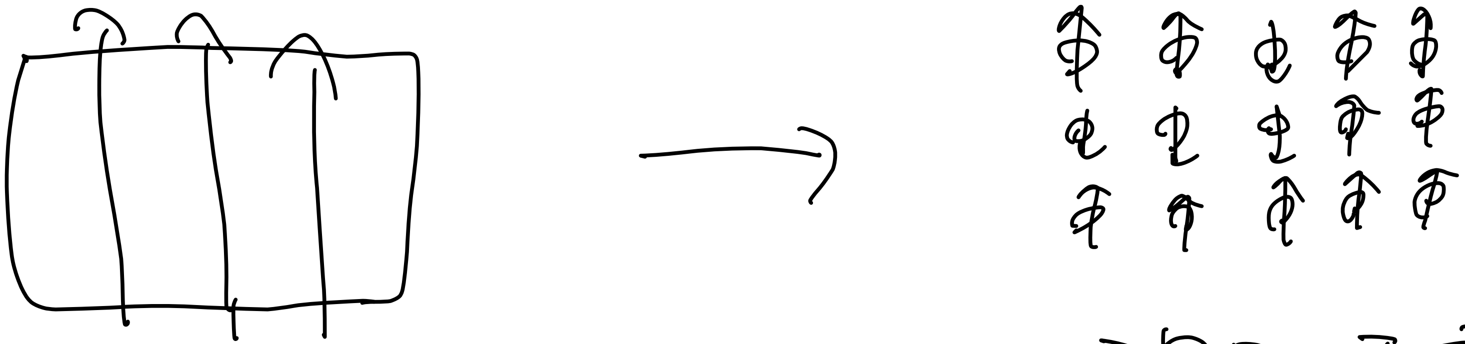
統計力学？

§ 有効模型

"問" に答えるために，"ミクロな記述" を
おおらかに 仮定する

「問が先」

例

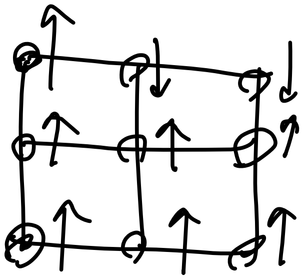


マクロ現象

ミクロ モデル

- 原子は結晶をつくる
- 各原子は磁気モーメント
  μ を持つ

§ 具体例



・d 次元格子

$$\Lambda = \{ i \mid i=(i_1,\dots,i_d),\ 1\le i_\alpha \le L \}$$

・各格子点 i 上に 磁気モーメント $\vec{\mu}_i$

（$|\vec{\mu}_i| = \mu$ ：固定）

・外部磁場 $\vec{h}$ に対する

相互作用エネルギー $-\sum \vec{\mu}_i \cdot \vec{h}$

（磁気モーメントは 外部磁場の方に むく）

・隣接磁気モーメントは そろいたがる

⇒ エネルギー $-\dfrac{J}{\mu^2}\sum_{\langle ij\rangle} \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j$

隣接対

$J > 0$ ：相互作用エネルギー

§ モデル

$$\vec{\mu} \equiv (\vec{\mu}_i)_{i\in\Lambda} \quad ; \quad |\vec{\mu}_i| = \mu$$

$$H(\vec{\mu}) \equiv -\frac{J}{\mu^2}\sum_{\langle ij\rangle} \vec{\mu}_i\cdot\vec{\mu}_j - \sum_i \vec{\mu}_i\cdot\vec{h}$$

"Heisenberg model"

さらに、 $\vec{\mu}_i = (0, 0, \mu\sigma_i)$, $\sigma_i \in \{1, -1\}$ に限定。 スピンと呼ぶ

(異方的磁性体)

$\sigma = (\sigma_i)_{i\in\Lambda}$ $\qquad \vec{h} = (0, 0, h)$

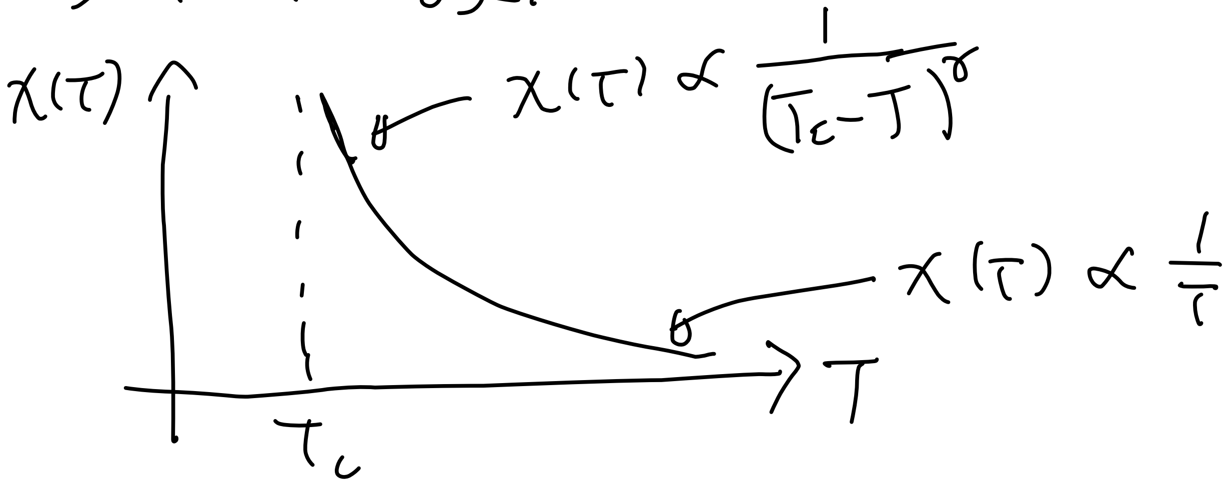
$$H(\sigma) = -J\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j - \mu\sum_i \sigma_i\cdot h$$

"Ising model" etc …

"仮説的モデル" で根拠があるわけではない…

§ 問題設定

現象



・説明できるのか？

・予言できるのか？

有効モデル

(例)

$$H_h(\sigma) = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i$$

$$\hat{M} = \mu \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i$$

§ 統計力学

- カノニカル分布 ： $P^{c}_{T,h}(\sigma) = \dfrac{1}{Z(T,h)} e^{-\beta H_h(\sigma)}$ ☆

- 観測される磁化 M

$$M = \langle \hat{M} \rangle^{c}_{T,h} = \sum_{\sigma} \overbrace{\left(\mu \sum \sigma_i\right)}^{\hat{M}} \frac{1}{Z(T,h)} e^{-\beta H_0(\sigma) + \overbrace{\beta \mu h \sum \sigma_i}^{\beta h \hat{M}}}$$

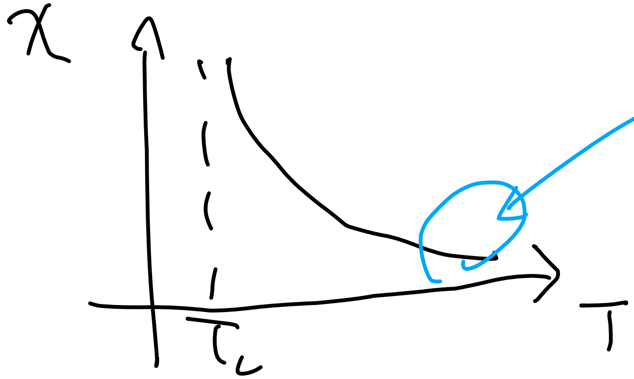
$$= \frac{1}{Z(T,h)} \left(\frac{\partial}{\partial h} Z(T,h) \right) k_B T$$

$$= k_B T \frac{\partial}{\partial h} \log Z(T,h)$$

☆ $$Z(T,h) = \sum_{\sigma} e^{-\beta H_0(\sigma) + \beta h \mu \sum \sigma_i}$$

$\Longrightarrow$ $Z(T,h)$ を計算すればよい・・・

§ キュリー則に向けて



高温領域 (?) ; 何に比べて

スピン間相互作用エネルギー J (磁気モーメント) に比べて高温

⇒ $J \ll k_B T$ の情況を調べる

$$\beta J \ll 1$$

⇒ $$Z(T,h) = \sum_{\sigma} e^{+\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta h \mu \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i}$$

$$= \sum_{\sigma} e^{\beta h \mu \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i}$$

$\beta J \to 0$ の極限

§ 分配関数の計算

$$Z(T,h) = \sum_{\sigma} e^{\beta\mu h \sum_{i\in\Lambda} \sigma_i}$$

$$= \sum_{\sigma} \prod_{i\in\Lambda} e^{\beta\mu h \sigma_i} \quad \left(= \sum_{\sigma_1,\sigma_2\cdots} e^{\beta\mu h \sigma_1} \cdot e^{\beta\mu h \sigma_2} \cdots\cdots \right.$$

$$\left. \;\; \parallel \quad \left(\sum_{\sigma_1} e^{\beta\mu h\sigma_1}\right) \cdot \left(\sum_{\sigma_2} e^{\beta\mu h\sigma_2}\right) \cdots \right)$$

$$= \prod_{i\in\Lambda} \left(\sum_{\sigma_i} e^{\beta\mu h \sigma_i} \right)$$

$$= \left(e^{\beta\mu h} + e^{-\beta\mu h} \right)^N \qquad \underline{N = L^d}$$

よって

$$M = k_B T \frac{\partial}{\partial h} \log Z(T,h)$$

$$= k_B T N \frac{\partial}{\partial h} \log \left(e^{\beta\mu h} + e^{-\beta\mu h} \right)$$

$$= N\mu \tanh(\beta\mu h) \quad //$$

§ キュリー則

$$\chi(T) = \left.\frac{\partial M}{\partial h}\right|_{h=0} = N\mu \frac{\partial}{\partial h} \tanh(\beta\mu h) \Big|_{h=0}$$

$$= N\mu^2\beta = \frac{\mu^2 N}{k_B T} \quad //$$

何を得たか：

" キュリー則とは，磁気モーメント間の相互作用エネルギーよりも高温になったとき，普遍的に観測される現象である．"

次回，常磁率の発散について…。