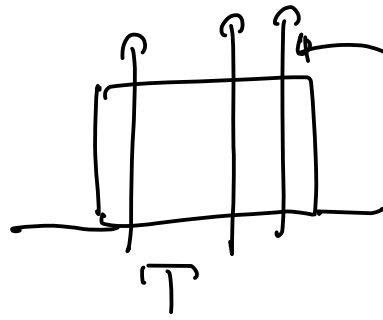


統計力学 A XI

講義 X E

2023 / 12 / 12

§ 例: 磁性体



✓ 外部磁場の大きさ h

✓ 磁化 $M = M(T, h)$

4 三則定可能

帯磁率

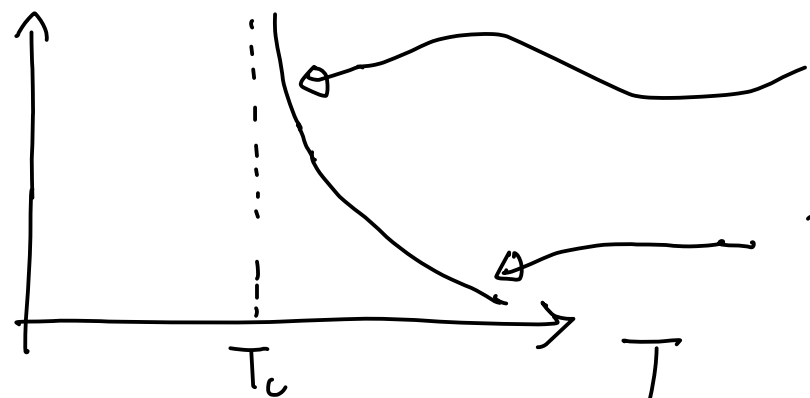
$$\chi(T) \equiv \left. \frac{\partial M(T, h)}{\partial h} \right|_{h=0}$$

例:

~~~~~

$\chi(T)$

→  
三則  
されたとき



$$\chi(T) \simeq \frac{1}{(T - T_c)^\gamma}$$

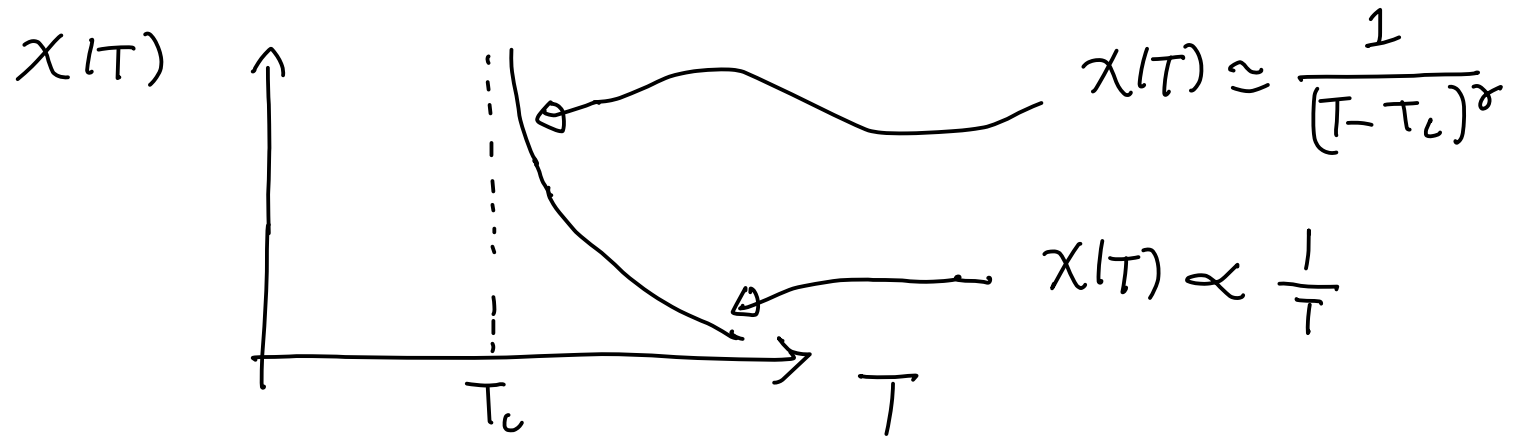
$$\chi(T) \propto \frac{1}{T}$$

(三則)

問: どのような条件で, どのように生じる?

# § 問題設定

現象



- ・ 説明できるのか？
- ・ 予言できるのか？

有効  
モデル

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i$$

etc . . .

# § 系統計力学: 公式

$$Z(\beta, h) = \sum_{\sigma} e^{-\beta H_h(\sigma)}$$

• カノ = カル 分布

$$P_{T, h}^c(\sigma) = \frac{1}{Z(\beta, h)} e^{-\beta H_h(\sigma)}$$

$$H_h(\sigma) = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i$$

• 磁化

$$M = \mu \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i$$

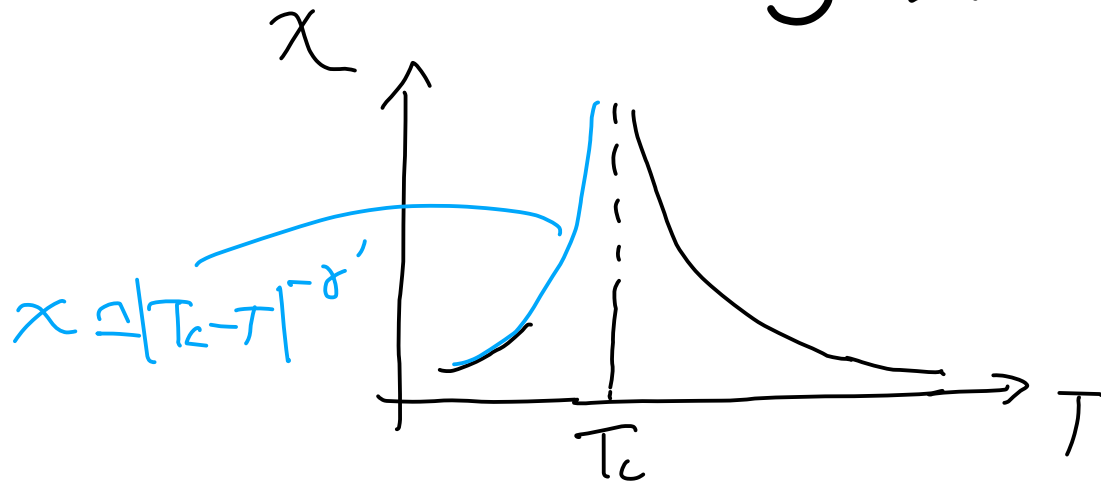
$$\langle M \rangle_{\beta, h} = \frac{1}{Z(\beta, h)} \sum_{\sigma} \left[ \sum_{i \in \Lambda} \mu \sigma_i \right] e^{+\beta J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta h \mu \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i}$$

$$= \frac{1}{Z(\beta, h)} k_B T \frac{\partial}{\partial h} \left[ \sum_{\sigma} e^{\beta J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta \mu h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i} \right] \equiv Z(\beta, h)$$

$$= k_B T \frac{\partial}{\partial h} \log Z(\beta, h)$$

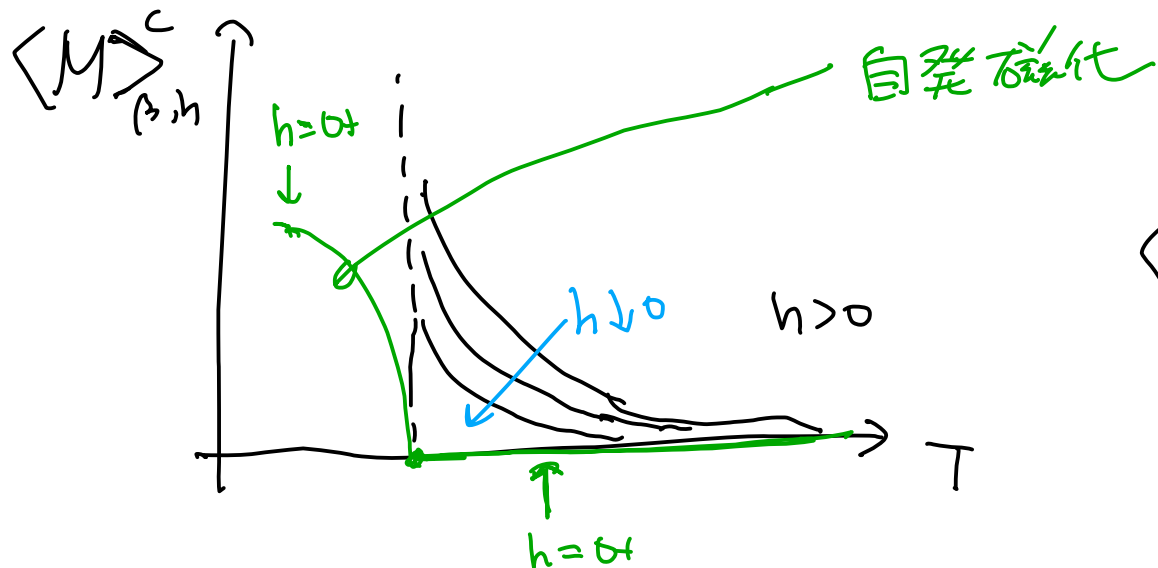
//

# § 磁化



$$\chi = \left. \frac{\partial \langle M \rangle_{\beta, h}^c}{\partial h} \right|_{h=0}$$

$$\chi \approx |T - T_c|^{-\gamma}$$



$$\langle M \rangle_{\beta, h}^c \approx (T_c - T)^\beta$$

~ Intermission ~

## § 分酉関数

$$Z(\beta, h) \equiv \sum_{\sigma} e^{\beta J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta \mu h \sum_i \sigma_i}$$

$$\langle M \rangle_{\beta, h}^c = k_B T \frac{\partial}{\partial h} \log Z(\beta, h)$$

$$\chi = \left. \frac{\partial \langle M \rangle_{\beta, h}^c}{\partial h} \right|_{h=0}$$

⇒  $Z(\beta, h)$  は  $(\beta, h)$  について 特異性が無い??  
( 任意の  $\beta$  について  $h$  について 微分可能  
に決まる ... )

それどころか ...  
 $\langle M \rangle_{\beta, h=0}^c = 0$  (自発磁化なし)

# § 証明

$$\langle M \rangle_{\beta, h=0}^c = \frac{\mu}{Z(\beta, h=0)} \sum_{\sigma} \left( \sum_i \sigma_i \right) e^{\beta J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j}$$

$$\sigma'_i = -\sigma_i$$

$$= \frac{-\mu}{Z(\beta, h=0)} \sum_{\sigma'} \left( \sum_i \sigma'_i \right) e^{\beta J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma'_i \sigma'_j}$$

$$= - \langle M \rangle_{\beta, h=0}^c$$

$$\therefore \langle M \rangle_{\beta, h=0}^c = 0$$

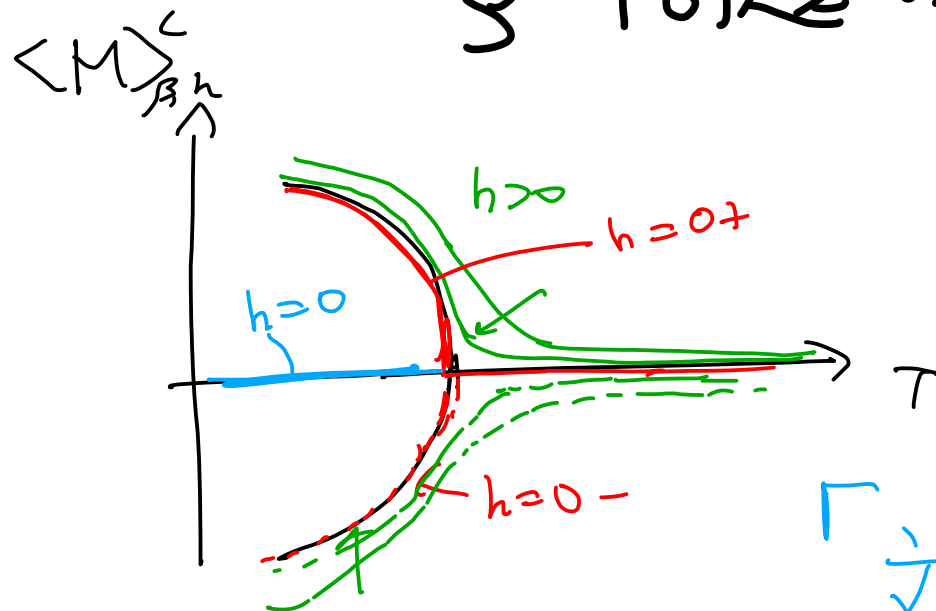
「111111 = p = カ」

$\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$  に対して

対称 (不変)

$\mathbb{Z}_2$  対称性

# § 問題の本質



$$\langle M \rangle_{\beta, h=0+}^c = -\langle M \rangle_{\beta, h=0-}^c$$

$$\neq \langle M \rangle_{\beta, h=0}^c = 0$$

「対称性の自発的破れ」

かゝる

$$Z(\beta, h) \equiv \sum_{\sigma} e^{\beta J \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta \mu h \sum_i \sigma_i}$$

$$\langle M \rangle_{\beta, h}^c = k_B T \frac{\partial}{\partial h} \log Z(\beta, h)$$

$Z(\beta, h)$  に特異性がないのに  $Z''$  が起る？

# § 熱力学極限

$$m(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \langle M \rangle_{\beta, h}^c$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} k_B T \frac{\partial}{\partial h} \underbrace{\frac{1}{N} \log Z(\beta, h)}_{N \rightarrow \infty \text{ 特徴的}}$$

$$Z(\beta, h) = e^{-\beta F(\beta, h)}$$

$N \rightarrow \infty$  特徴的  
に  $\chi$  もある。

$$f(\beta, h)$$

$$\chi(\beta) = \left. \frac{\partial}{\partial h} m(\beta, h) \right|_{h=0}$$

$$\sim \frac{1}{(T - T_d)^2}$$

$\sim T_d$  ではない。

✗

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial h} \langle M \rangle_{\beta, h}^c \right)_{h=0} \text{ は 特徴的ではない!}$$

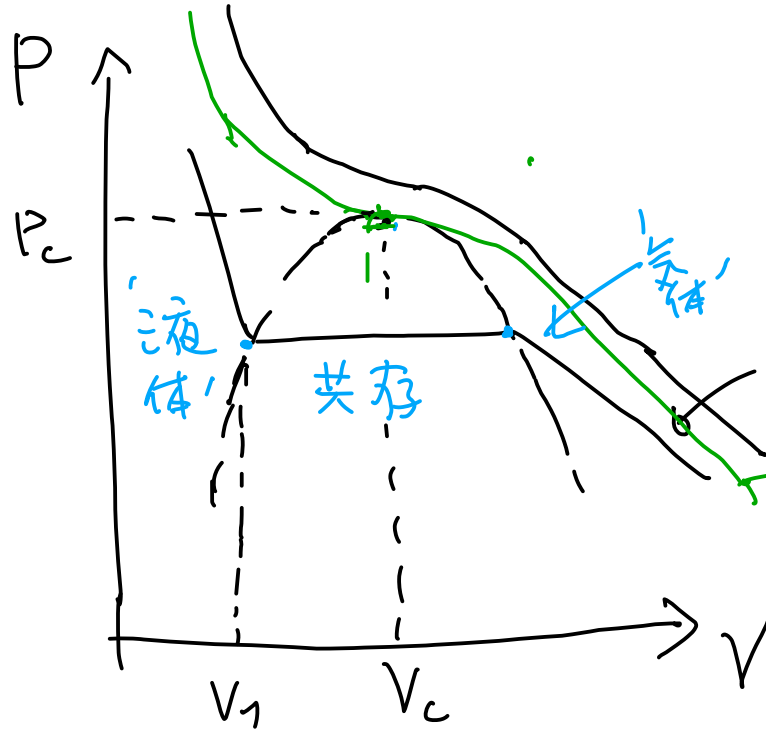
# § 結果

|                              | $\beta$         | $\gamma$        | ...            |
|------------------------------|-----------------|-----------------|----------------|
| <u><math>d \geq 4</math></u> | $\frac{1}{2}$   | 1               | ワイスの理論 / 平均場理論 |
| $d = 3$                      | 0.326...        | 1.25...         |                |
| $d = 2$                      | $\frac{1}{8}$   | $\frac{n}{4}$   | オシエーガの厳密解      |
| $d = 1$                      | $T_c = 0$<br>とし | $T_c = 0$<br>とし | 重正化群法          |

e.g.  $H(\sigma) = -\frac{J}{2N} \left( \sum_i \sigma_i \right)^2$

~ Intermission ~

# § 気液臨界点



$$\bullet |V_l(T) - V_c| \approx (T_c - T)^{\beta_{LG}}$$

$$\bullet K = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \approx (T - T_c)^{-\gamma_{LG}}$$

臨界点  
 $T = T_c$

理想気体

$$P = \frac{NRT}{V} \quad \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -\frac{P}{V}$$

$$K = +\frac{1}{V} \frac{V}{P} = \frac{V}{NRT}$$

(キュリー則と同じ)

ファンデルワールス  
 状態方程式

$$\Rightarrow \beta_{LG} = \frac{1}{2}, \gamma_{LG} = 1$$

(平均場理論と同じ)

# § おどろくべきこと

$d=3$

- $\beta_{LG} = \beta$
- $\gamma_{LG} = \gamma$

(数値計算, 実験  
からの予想)

↑  
気相転移臨点

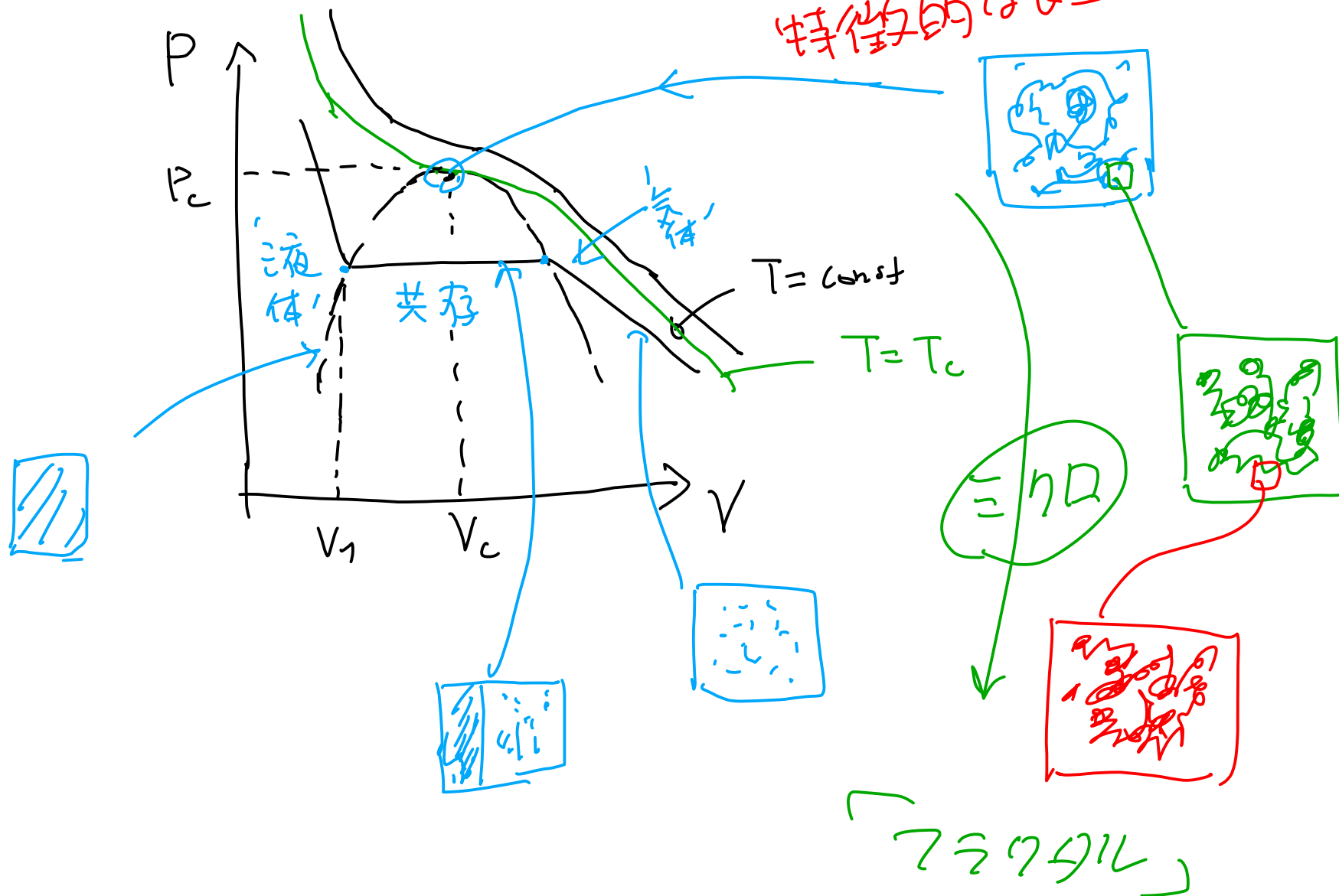
(物質の種類ごとに  
異なる)

↑ Ising model  
(具象的磁気体)

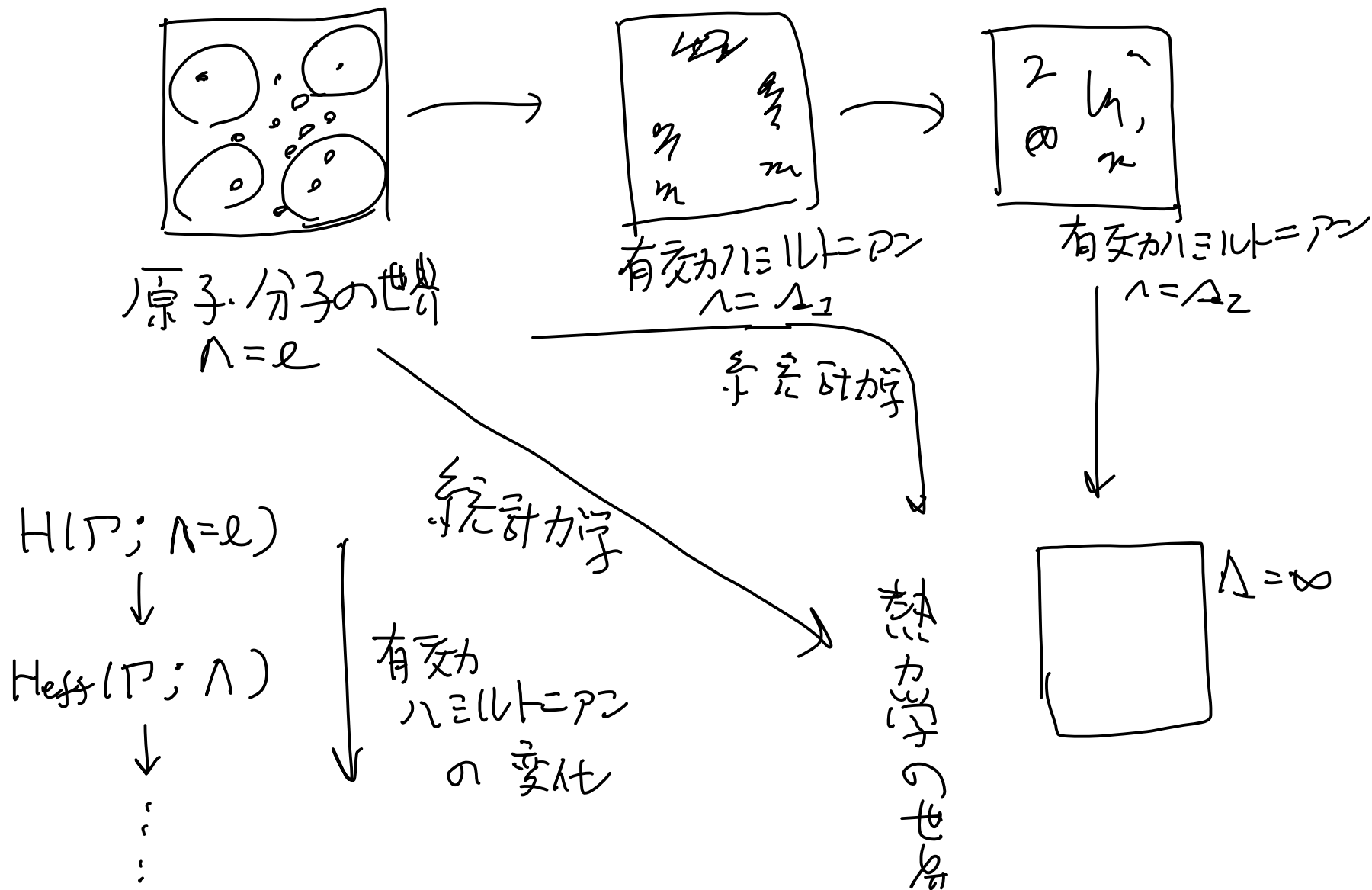
↑ Universality class が「同じ」

# § 何故？

特徴的な長さの消失



# § くりこみ群



## § くりこみ群 II

$$e^{-\beta H_{\text{eff}}(\Gamma_{\text{eff}}; \Lambda)} \equiv \int d\Gamma \delta(\Gamma_{\text{eff}} - \Gamma_{\text{eff}}(\Gamma)) e^{-\beta H(\Gamma; \Lambda=2)}$$

$$\frac{d}{d\Lambda} H_{\text{eff}}(\Gamma_{\text{eff}}; \Lambda) \equiv G(\Gamma_{\text{eff}}; \Lambda)$$

これを計算する方法

$\Rightarrow$  Wilson [97]  
// Nobel prize.

\*  $d = 4 - \varepsilon$  次元 ( $\varepsilon > 0$ )  
2" の計算

~ Intermission ~

## § まとめ

- ▷ 熱力学量の特異性 (発散, 不連続)  
は統計力学で計算できる!
- ▷ 気液臨界点と Ising model の転移点は  
Universality class が同じ!
- ▷ "スケール" に依存した有効モデルの变化  
により Universality class を言及できる!