

統計力学 A Ⅹ

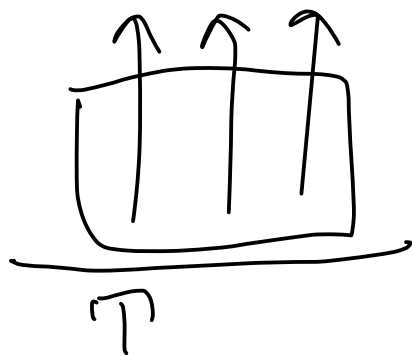
講義 Ⅹ 毛

2023/12/05

§ 今日の目標

1. “有効モデル” という考え方を学ぶ
2. 磁性体のキュリー則を導く

§ 磁性体



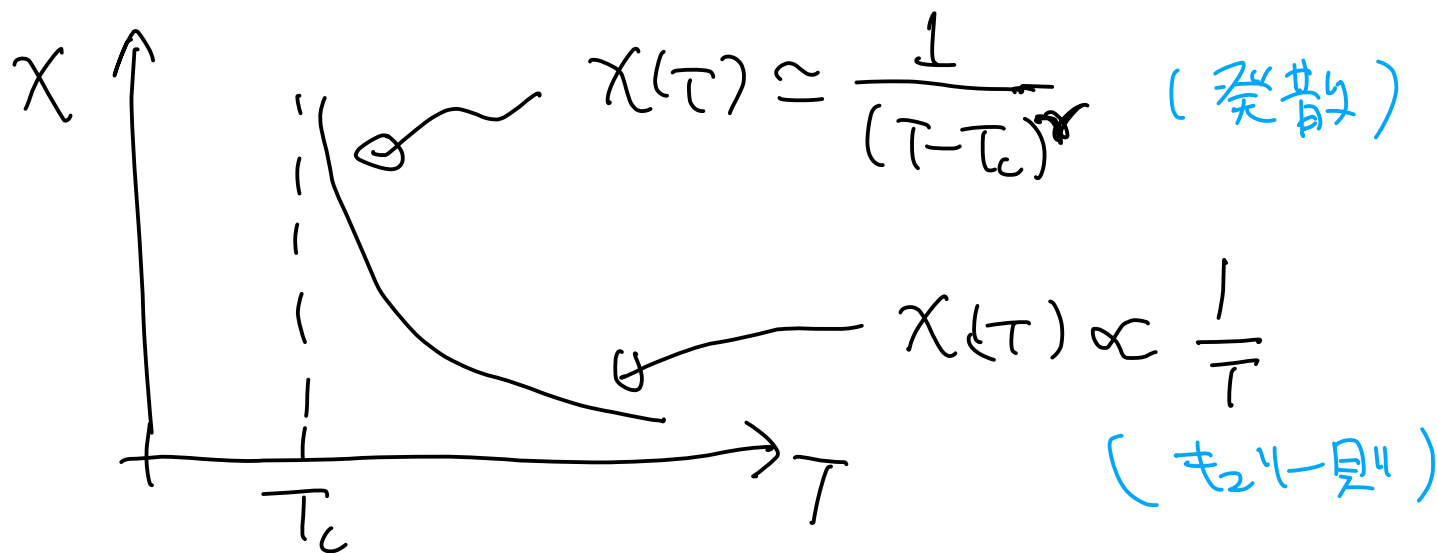
外部磁場 $h = (0, 0, h)$

磁化 $M : M(T, h)$

≡ 観定量
(cf 電磁気学)

比磁率 $\chi(T) \equiv \left. \frac{\partial M(T, h)}{\partial h} \right|_{h=0}$

三例 :



問: 発散やモリー則が生じる条件?

§ 三つ口へ...

磁化: 物質中に「磁気的な分極(〜磁石)」
が生じる (マクロ現象から)



各原子の「磁気モーメント」の集まり



スピンの、電荷の運動



量子電磁力学

統計力学
?



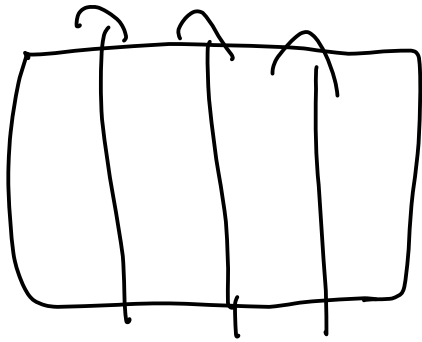
有効模型

“問題”に答えるために，“正確な記述”を

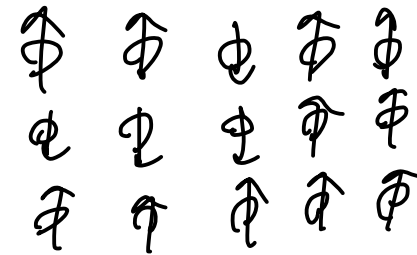
「問題が先」

あらかじめ 仮定する

例



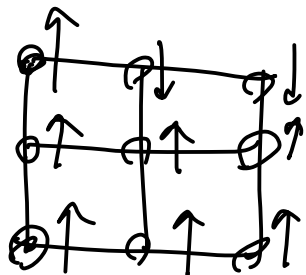
マクロ現象



ミクロモデル

- ・ 原子は結晶をつくる
- ・ 各原子は磁気モーメント
μ を持つ

§ 具体例



- d次元格子

$$\Lambda = \{ \vec{i} \mid \vec{i} = (i_1, \dots, i_d), 1 \leq i_k \leq L \}$$

- 各格子点 $\vec{i}$ 上には 磁気モーメント $\vec{\mu}_i$
($|\vec{\mu}_i| = \mu$: 固定)

- 外部磁場 $\vec{h}$ に対する

相互作用エネルギー $-\sum \vec{\mu}_i \cdot \vec{h}$

(磁気モーメントは 外部磁場の
の方向に働く)

- 隣接する磁気モーメントは 互にたがう

$$\Rightarrow \text{エネルギー} = -\frac{J}{\mu^2} \sum_{\langle i, j \rangle} \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j$$

$J > 0$: 相互作用エネルギー

隣接する

§ 7.1

$$\vec{\mu} \equiv (\vec{\mu}_i)_{i \in \Lambda} \quad ; \quad |\vec{\mu}_i| = \mu$$

$$H(\vec{\mu}) \equiv -\frac{J}{\mu^2} \sum_{\langle i, j \rangle} \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j - \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{h}$$

"Heisenberg model"

さらに, $\vec{\mu}_i = (0, 0, \mu \sigma_i)$, $\sigma_i \in \{1, -1\}$ (= 3次元, σ_i は $\mathbb{R}^3$ の基底ベクトル)

$$\sigma = (\sigma_i)_{i \in \Lambda}$$

$$\vec{h} = (0, 0, h)$$

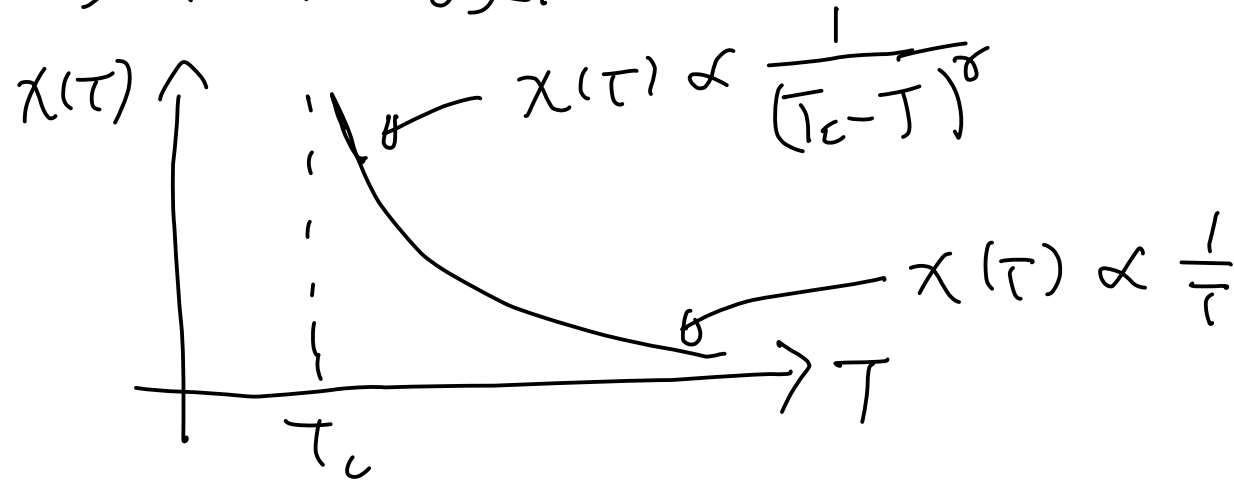
$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu \sum_i \sigma_i \cdot h$$

"Ising model" etc ...

"仮説的モデル" の根拠があるわけはたいてい--

§ 問題設定

現象



↑。説明できるのか?
予言できるのか?

有効なモデル
(194)

$$H_h(\sigma) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu_h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i$$

$$\hat{M} = \mu \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i$$

§ 系統計力学

- 力 = カル分布 : $P_{T,h}^C(\sigma) = \frac{1}{Z(T,h)} e^{-\beta H_h(\sigma)}$ ★
- 観測される物理量 M

$$M = \langle \hat{M} \rangle_{T,h}^C = \sum_{\sigma} \left(\sum_i \sigma_i \right) \frac{1}{Z(T,h)} e^{-\beta H_0(\sigma) + \underbrace{\beta h \sum_i \sigma_i}_{\beta h \hat{M}}}$$

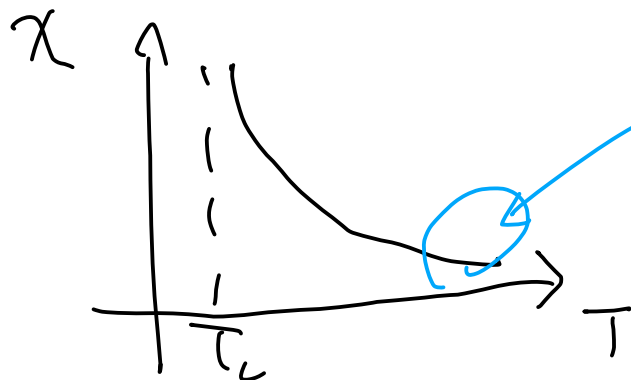
$$= \frac{1}{Z(T,h)} \left(\frac{\partial}{\partial h} Z(T,h) \right) k_B T$$

$$= k_B T \frac{\partial}{\partial h} \log Z(T,h)$$

★ $Z(T,h) = \sum_{\sigma} e^{-\beta H_0(\sigma) + \beta h \sum_i \sigma_i}$

$\Rightarrow Z(T,h)$ は 統計力学の要諦 ...

§ 11-1 則に向けて



高温領域 (?) ; 何に比べて

スピンの間相互作用エネルギー J
(磁気モーメント) にくらべて 高温

⇒ $J \ll k_B T$ の 情況 を 言うべき

$$\beta J \ll 1$$

$$\Rightarrow Z(T, h) = \sum_{\sigma} e^{+\beta J \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta h \mu \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i}$$

$$\stackrel{\beta J \rightarrow 0 \text{ の極限}}{=} \sum_{\sigma} e^{\beta h \mu \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i}$$

§ 1 配位関数数の計算

$$\begin{aligned}
 Z(T, h) &= \sum_{\sigma} e^{\beta \mu h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i} \\
 &= \sum_{\sigma} \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta \mu h \sigma_i} \quad \left(= \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots} e^{\beta \mu h \sigma_1} \cdot e^{\beta \mu h \sigma_2} \dots \right. \\
 &= \prod_{i \in \Lambda} \left(\sum_{\sigma_i} e^{\beta \mu h \sigma_i} \right) \quad \left(\sum_{\sigma_1} e^{\beta \mu h \sigma_1} \right) \left(\sum_{\sigma_2} e^{\beta \mu h \sigma_2} \right) \dots \\
 &= \left(e^{\beta \mu h} + e^{-\beta \mu h} \right)^N \quad \underline{N = L^d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 2 \quad \mu &= k_B T \frac{\partial}{\partial h} \log Z(T, h) \\
 &= k_B T N \frac{\partial}{\partial h} \log (e^{\beta \mu h} + e^{-\beta \mu h}) \\
 &= N \mu \tanh (\beta \mu h) \quad //
 \end{aligned}$$

§ 2.1-1 目

$$\chi(T) = \left. \frac{\partial M}{\partial h} \right|_{h=0} = N\mu \left. \frac{\partial}{\partial h} \tanh(\beta \mu h) \right|_{h=0}$$
$$= N\mu^2 \beta = \frac{\mu^2 N}{k_B T} //$$

何を導いたか：

“ 2.1-1 目とは、石磁石-スピン間の相互作用
エネルギーよりも高温にわたるとき、普遍的に
成り立つ現象である。 ”

次回、石磁石の分散について...