統計学A Ⅴ

講義メモ

2022/11/08

§ 今日の目標

大きな N の計算になれる!

▷ 大きなNで生じる法則

▷ 漸近解析の手法

注) "公式の導出" はひとやすみ.

§ N個のコイン投げ

N個のコインを一度に投げる

i番目のコイン 表 ---- $\sigma_i = +1$

ウラ ---- $\sigma_i = -1$

平均スコア $\hat{m} \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i$

$\hat{m}$の値は?

"Nが十分に大きかったら, ほぼ0" ?

§ 確率モデル

各々の i について

$$\begin{cases} P(\sigma_i = +1) = \frac{1}{2} \\ P(\sigma_i = -1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

（公正なコイン）

$P(\hat{m} = m)$: $\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \right.$ が m となる確率 $\left. \right)$

素直に計算する

$$P(\hat{m} = m) = {}_N C_{N_+} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$\begin{cases} N_+ : \text{表の枚数} \\ N_- : \text{ウラの枚数} \end{cases}$$

$P(m)$ とも書く

（引数で区別）

$$\begin{cases} N_+ = \frac{1+m}{2} N \\ N_- = \frac{1-m}{2} N \end{cases} \longleftarrow \begin{cases} N_+ + N_- = N \\ \frac{N_+ - N_-}{N} = m \end{cases}$$

$$\therefore \quad P(\hat{m}=m) = \frac{1}{2^N}\frac{N!}{\left(\frac{1+m}{2}N\right)!\left(\frac{1-m}{2}N\right)!} \;;\quad \frac{1+m}{2}N \in \{0,1,\dots,N\}$$

漸近的な振舞：

$$\log P(\hat{m}=m) = \overbrace{-N\log 2 + N\log N}^{N\log\frac{N}{2}} - \cancel{N}$$

$$- \frac{1+m}{2}N\log\frac{1+m}{2}N - \frac{1-m}{2}N\log\frac{1-m}{2}N$$

$$+ \cancel{\frac{1+m}{2}N} - \cancel{\frac{1-m}{2}N} + o(N)$$

$$N\log\frac{N}{2} = \frac{1+m}{2}N\log\frac{N}{2} + \frac{1-m}{2}N\log\frac{N}{2}$$

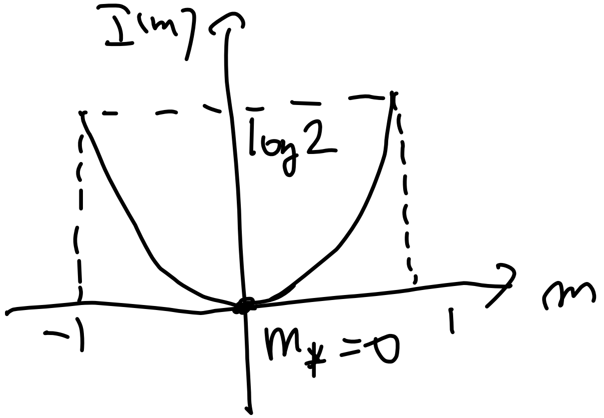
$$= -\frac{1+m}{2}N\log\frac{1+m}{2}N\cdot\frac{2}{N} - \frac{1-m}{2}N\log\frac{1-m}{2}N\cdot\frac{2}{N} + o(N)$$

$$= -\frac{1+m}{2}N\log(1+m) - \frac{1-m}{2}N\log(1-m) + o(N)$$

$$P(\hat{m}=m) = e^{-NI(m)+o(N)}$$

（大偏差性質）

$$I(m) = \frac{1+m}{2}\log(1+m) + \frac{1-m}{2}\log(1-m)$$



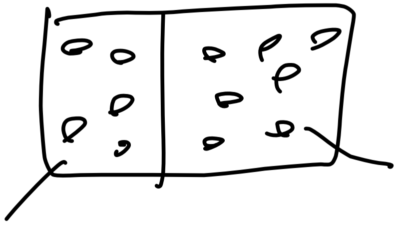
もっとも確からしい値 m_* 以外の値をとる確率は非常に小さい

（Nについて指数関数的に）

$$\left(\begin{array}{l} \text{cf: 大数の法則} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{N\to\infty} P(|m| > \varepsilon) = 0 \end{array} \right)$$

― 勝負は指数関数の肩で決まる ―

§ 別の例



$\sigma_i^A \in \{+1,-1\}$

$\sigma_i^B \in \{+1,-1\}$

- $N_A + N_B = N$
- 全体のスコアは m とする（固定）

$$\hat{m}_A = \frac{1}{N_A}\sum_{i=1}^{N_A}\sigma_i^A, \quad \hat{m}_B = \frac{1}{N_B}\sum_{i=1}^{N_B}\sigma_i^B$$

- もっともらしい $\hat{m}_A$, $\hat{m}_B$ の値はいくらか？

注）　$\hat{m}_A N_A + \hat{m}_B N_B = \underbrace{mN}_{固定}$

- $N_A \ll N_B$ のときの
  漸近的振舞？

$$P(\hat{m}_A = m_A \mid \hat{m} = m) = \frac{P(\hat{m}_A = m_A,\ \hat{m} = m)}{P(\hat{m} = m)}$$

条件

$$\delta(x, y) = 1 \ (x = y)$$
$$= 0 \ (x \neq y)$$

$$= \frac{\sum_{\sigma^A, \sigma^B} \delta(\hat{m}_A, m_A)\, \delta(\hat{m}, m)}{\sum_{\sigma^A, \sigma^B} \delta(\hat{m}, m)}$$

$$\delta(\hat{m}, m)$$
$$= \delta(\hat{m}_B N_B,\ mN - \hat{m}_A N_A)$$

$\hat{m}_A \to m_A$ としてよい

$$= \frac{\sum_{\sigma^A, \sigma^B} \delta(\hat{m}_A N_A,\ m_A N_A)\, \delta(\hat{m}_B N_B,\ mN - m_A N_A)}{\sum_{\sigma^A, \sigma^B} \delta(\hat{m}, m)}$$

$$\sigma^A = (\sigma^A_1, \cdots, \sigma^A_{N_A})$$
$$\sigma^B = (\sigma^B_1, \cdots, \sigma^B_{N_B})$$

$$= \frac{P(\hat{m}_A = m_A)\, P\left(\hat{m}_B = \frac{1}{N_B}(mN - m_A N_A)\right)}{P(\hat{m} = m)}$$

$$P(\hat{m}_A = m_A \mid \hat{m} = m)$$

$$= \exp\left(-N_A I(m_A) - N_B I\left(\frac{mN - m_A N_A}{N_B}\right) + N I(m) + o(N)\right)$$

$$= \exp\left(-N_A J(m_A) + o(N)\right) \qquad N_A = C_A N,\ N_B = C_B N$$

$$J(m_A) = I(m_A) + \frac{C_B}{C_A} I\Big(\underbrace{\frac{mN - m_A N_A}{N_B}}_{\parallel\ m_B}\Big) - \frac{1}{C_A} I(m)$$

もっとも確からしい値 m_{A*}, m_{B*}

$$J'(m_{A*}) = 0$$

$$C_A I'(m_{A*}) - C_B I'(m_B) \frac{N_A}{N_B} \Big|_{m_B = \frac{mN - m_{A*} N_A}{N_B}} = 0$$

$$\cancel{N_A} I'(m_{A*}) = \cancel{N_B} I'(m_{B*})$$

講義では正しく計算した

$$J(m_A) = I(m_A) + \frac{C_B}{C_A} I\Big(\underbrace{\frac{mN - m_A N_A}{N_B}}_{\mathrel{\text{\rotatebox{90}{=}}}\, m_B}\Big) - \frac{1}{C_A} I(m)$$

$N_B \gg N_A$ より

$$I\left(\frac{mN_B + mN_A - m_A N_A}{N_B}\right)$$

$$= I\left(m + (m - m_A)\frac{N_A}{N_B}\right) = I(m) + I'(m)(m - m_A)\frac{N_A}{N_B} + o\left(\frac{N_A}{N_B}\right)$$

講ギで符号ミス?

$$N_A J(m_A) = N_A I(m_A) + N_B\left(I(m) + I'(m)(m - m_A)\frac{N_A}{N_B} + o\left(\frac{N_A}{N_B}\right)\right)$$

$$- N I(m)$$

$$= N_A\left[I(m_A) - m_A I'(m)\right] - N_A\left(I(m) - I'(m)m\right) + o(N_A)$$

$$= N_A\left[I(m_A) - m_A I'(m) - \left(I(m) - I'(m)m\right)\right] + o(N_A)$$

$$\therefore\ P(\hat{m}_A = m_A \mid \hat{m} = m)$$

$$= \exp(-N_A J(m_A) + o(N_A))$$

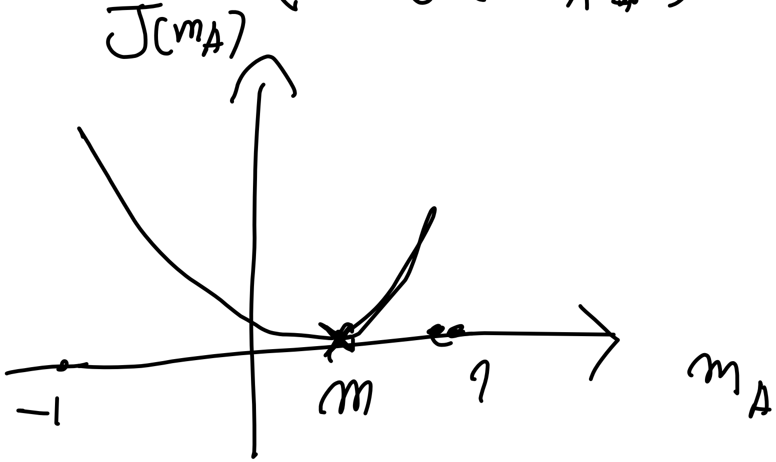
外側の環境の条件から定まる

$$J(m_A) = I(m_A) - m_A I'(m) - \underbrace{(I(m) - m I'(m))}_{\text{定数}}$$

$$J'(m_{A*}) = 0 \iff I'(m_A) - I'(m) = 0$$

$$\iff m_{A*} = m$$

$$\& \quad J(m_{A*}) = 0$$



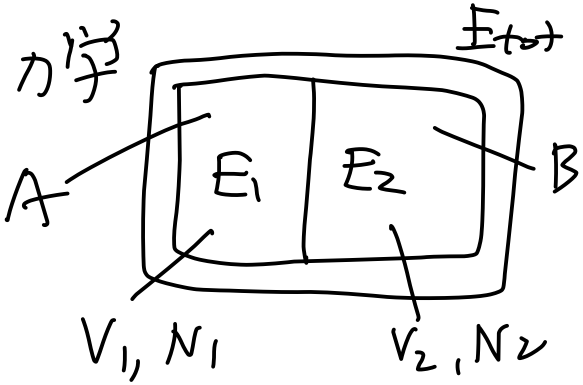
$$P(\hat{m}_A = m_B \mid \hat{m} = m) = \mathrm{const}\, e^{-N_A(I(m_A) - m_A I'(m)) + o(N_A)}$$

(小さな部分系の法則)

次回、気体に応用。
カノニカル分布を導く。

§ 余談

熱力学



・$E_1+E_2=E_{tot}$: fix

・(E_1, E_2) の値は？

⇒ 温度が等しい

⟺ $S_A(E_1,V_1,N_1)+S_B(E_2,V_2,N_2)$ を

最大にする (E_1, E_2)

[エントロピー最大原理]

先週の話

$$\Longleftrightarrow \quad P(E_1)=\text{const}\; e^{\frac{1}{k_B}\left[\underbrace{S_A(E_1,V_1,N_1)+S_B(E_2,V_2,N_2)}_{}\right]}$$

ここが最大のところが

もっともらしい値になる

⟺ エントロピー最大原理