

統計学A V

講義 X 毛

2023/10/31

§ 今日の目標

大きな N の計算にたむける!

▷ 大きな N で生じる 法則

▷ 漸近解析の手法

注意) "公式の導出" はひとやすみ.

§ N 個のコイン投げ

N 個のコインを一度に投げる

i 番目のコイン 表 $\cdots \sigma_i = +1$

裏 $\cdots \sigma_i = -1$

平均スコア $\hat{m} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i$

$\hat{m}$ の値は？

“ N が十分に大きかったら、ほぼ0”？

§ 確率モデル

各回のみ
に7112

$$\begin{cases} P(\sigma_i = +1) = \frac{1}{2} \\ P(\sigma_i = -1) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{公正なコイン})$$

$$P(\hat{m} = m) : \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \text{ が } m \text{ となる確率} \right)$$

素直に計算する

$$P(\hat{m} = m) = N C_{N_+} \left(\frac{1}{2} \right)^N$$

$$\begin{cases} N_+ : \text{表の枚数} \\ N_- : \text{裏の枚数} \end{cases}$$

$P(m)$ と書く

(引数で区別)

$$\begin{cases} N_+ = \frac{1+m}{2} N \\ N_- = \frac{1-m}{2} N \end{cases}$$



$$\begin{cases} N_+ + N_- = N \\ \frac{N_+ - N_-}{N} = m \end{cases}$$

$$\therefore P(\hat{m}=m) = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{\left(\frac{1+m}{2}N\right)! \left(\frac{1-m}{2}N\right)!}; \quad \frac{1+m}{2}N \in \{0, 1, \dots, N\}$$

三 附近的熵与反熵:

$$\log P(\hat{m}=m) = -N \log 2 + \overbrace{N \log N}^{N \log \frac{N}{2}} - N$$

$$- \frac{1+m}{2}N \log \frac{1+m}{2}N - \frac{1-m}{2}N \log \frac{1-m}{2}N$$

$$N \log \frac{N}{2} = \frac{1+m}{2}N \log \frac{N}{2} + \frac{1-m}{2}N \log \frac{N}{2}$$

$$+ \cancel{\frac{1+m}{2}N} - \cancel{\frac{1-m}{2}N} + o(N)$$

$$= - \frac{1+m}{2}N \log \frac{1+m}{2}N \cdot \frac{2}{N}$$

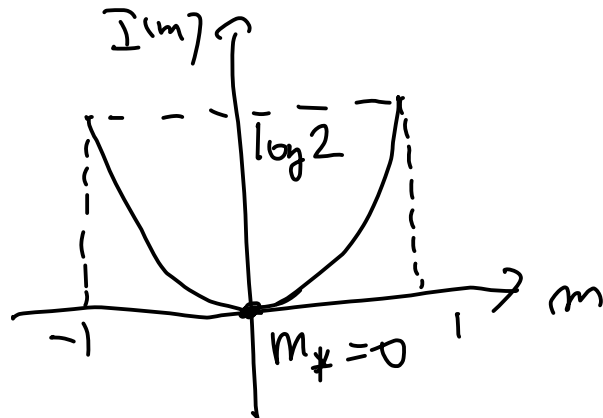
$$- \frac{1-m}{2}N \log \frac{1-m}{2}N \cdot \frac{2}{N} + o(N)$$

$$= - \frac{1+m}{2}N \log(1+m) - \frac{1-m}{2}N \log(1-m) + o(N)$$

$$P(\hat{m}=m) = e^{-NI(m)} \approx 0(N)$$

(大偏差性質)

$$I(m) = \frac{1+m}{2} \log(1+m) + \frac{1-m}{2} \log(1-m)$$



もっとも確からしい値 m_* と $1-m$ の値
をとる 確率は非常に小さい

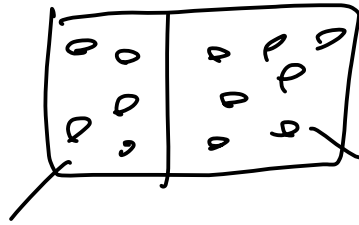
(N につ $\dot{\text{て}}$ 指数関数的に)

cf: 大数の法則

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{N \rightarrow \infty} P(|m| > \varepsilon) = 0$$

— 勝負は指数関数の肩で決まる —

§ 2 の例



- $N_A + N_B = N$

$\sigma_i^B \in \{+1, -1\}$. 全体のスコアは m とする
(固定)

N_A のコイン

$\sigma_i^A \in \{+1, -1\}$

$$\hat{m}_A = \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \sigma_i^A, \quad \hat{m}_B = \frac{1}{N_B} \sum_{i=1}^{N_B} \sigma_i^B$$

• ほとんど $\hat{m}_A, \hat{m}_B$ の値はいくらか?

$$\text{III)} \quad \hat{m}_A N_A + \hat{m}_B N_B = \underbrace{m N}_{\text{固定}}$$

• $N_A \ll N_B$ のときの

近似的な結果?

$$P(\hat{m}_A = m_A \mid \hat{m} = m) = \frac{P(\hat{m}_A = m_A, \hat{m} = m)}{P(\hat{m} = m)}$$

$$\delta(x, y) = 1 \quad (x=y)$$

$$= 0 \quad (x \neq y)$$

$$= \frac{\sum_{\sigma^A, \sigma^B} \delta(\hat{m}_A, m_A) \delta(\hat{m}, m)}{\sum_{\sigma^A, \sigma^B} \delta(\hat{m}, m)}$$

$$\delta(\hat{m}, m)$$

$$= \delta(\hat{m}_B N_B, mN - \hat{m}_A N_A)$$

$$\sum_{\sigma^A, \sigma^B} \delta(\hat{m}_A N_A, m_A N_A) \delta(\hat{m}_B N_B, mN - m_A N_A)$$

$$= \frac{\sum_{\sigma^A, \sigma^B} \delta(\hat{m}, m)}$$

$$= \frac{P(\hat{m}_A = m_A) P(\hat{m}_B = \frac{1}{N_B} (mN - m_A N_A))}{P(\hat{m} = m)}$$

$$\sigma^A = (\sigma_1^A, \dots, \sigma_{N_A}^A)$$

$$\sigma^B = (\sigma_1^B, \dots, \sigma_{N_B}^B)$$

1/2
略
可

$$\begin{aligned}
 & P(\hat{m}_A = m_A \mid \hat{m} = m) \\
 &= \exp(-N_A I(m_A) - N_B I(\frac{mN - m_A N_A}{N_B}) + N I(m) + o(N)) \\
 &= \exp(-N_A J(m_A) + o(N)) \quad N_A = C_A N, \quad N_B = C_B N
 \end{aligned}$$

$$J(m_A) = I(m_A) + \underbrace{\frac{C_B}{C_A} I(\frac{mN - m_A N_A}{N_B})}_{m_B} - \frac{1}{C_A} I(m)$$

$\exists, \exists \in \mathbb{R}$ のようにして m_{A*}, m_{B*}

$$J'(m_{A*}) = 0$$

$$\left. C_A I'(m_{A*}) - C_B I'(m_B) \frac{N_A}{N_B} \right|_{m_B = \frac{mN - m_{A*} N_A}{N_B}} = 0$$

$$I'(m_{A*}) = I'(m_{B*})$$

$$J(m_A) = I(m_A) + \frac{c_B}{c_A} I\left(\underbrace{\frac{mN - m_A N_A}{N_B}}_{m_B}\right) - \frac{1}{c_A} I(m)$$

$$N_B \gg N_A \text{ fill}$$

$$I\left(\frac{mN_B + mN_A - m_A N_A}{N_B}\right)$$

$$= I\left(m + (m - m_A) \frac{N_A}{N_B}\right) = I(m) + I'(m) (m - m_A) \frac{N_A}{N_B} + o\left(\frac{N_A}{N_B}\right)$$

$$N_A J(m_A) = N_A I(\underline{m_A}) + N_B \left(I(m) + I'(m) (m - \underline{m_A}) \frac{N_A}{N_B} + o\left(\frac{N_A}{N_B}\right) \right) - N I(m)$$

$$= N_A \left[I(\underline{m_A}) - \underline{m_A} I'(m) \right] - N_A \left[\underbrace{I(m) - I'(m)m}_{\text{cancel}} + o(N_A) \right]$$

$$= N_A \left[I(m_A) - m_A I'(m) - (I(m) - I'(m)m) \right] + o(N_A)$$

$$\therefore P(\hat{m}_A = m_A | \hat{m} = m)$$

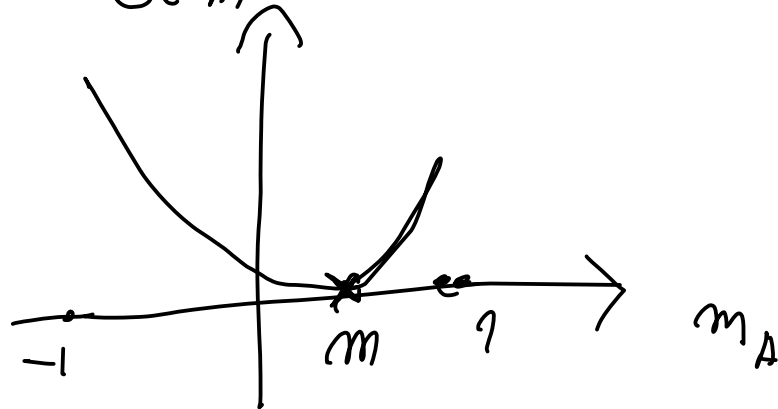
$$= \exp(-N_A J(m_A) + o(N_A))$$

$$J(m_A) = \underline{I(m_A)} - \underline{m_A} \underbrace{I'(m)}_{\text{定数}} - \underbrace{(I(m) - m I'(m))}_{\text{定数}}$$

$$J'(m_{A*}) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad I'(m_A) - I'(m) = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad m_{A*} = m$$

$$J(m_{A*}) = 0$$



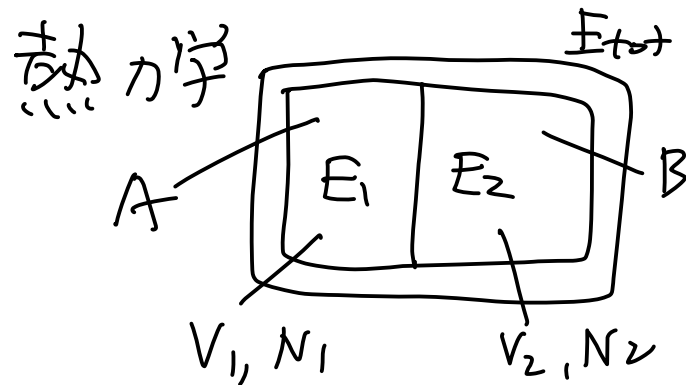
$$P(\hat{m}_A = m_B | \hat{m} = m) = \omega_B e^{-N_A(I(m_A) - m_A I'(m))} \quad \text{to } 1/N_A$$

(小さい部分系の法則)

次回、気体に應用。

カル分布を導く。

§ 余談



• $E_1 + E_2 = E_{tot} : \text{fix}$

• (E_1, E_2) の値は？

$\Rightarrow$ 温度が等しい

$\Leftrightarrow S_A(E_1, V_1, N_1) + S_B(E_2, V_2, N_2)$

最大にする (E_1, E_2)

[エントロピー最大原理]

先図の話を

$(\Rightarrow) P(E_1) = \text{const} \propto \frac{1}{k_B} [S_A(E_1, V_1, N_1) + S_B(E_2, V_2, N_2)]$

ここが最大のところか

もっとも大きい値になる

$\Rightarrow$ エントロピー最大原理