

統計力学 A/2021 年度試験 /担当 佐々

2022/01/25 10:30-11:50 実施 教科書・ノート持ち込み不可

以下の問題 I, II, III に答えよ。問題全体に渡って、 k_B をボルツマン定数とする。また、 $\beta = 1/(k_B T)$ によって β と T は常に関係しているとする。 N は十分に大きな数とする。

問題 I. 古典力学に従う N 粒子系に対して、 i 番目の粒子の位置を \mathbf{r}_i , 運動量を \mathbf{p}_i と書き、そのミクロな力学状態を $\Gamma = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$ と記す。 N 個の粒子は体積 V の「理想的な箱」に閉じ込められている。以下の間に答えよ。

(i) 例題として希薄気体を考えよう。希薄気体の場合でも、粒子間相互相互作用が変わるわけではなく、例えば、二つの粒子が近づいたときには強い斥力が働く。それにも関わらず、希薄気体では、粒子間相互作用を無視してよい。その理由を述べよ。

(ii) 全エネルギー E のミクロカノニカル分布にもとづいて、希薄気体の圧力 $p = p(E, V, N)$ および温度 $T = T(E, V, N)$ を計算せよ。ただし、ボルツマン公式や熱力学関係式は自由に使ってよい。

(iii) 温度 T のカノニカル分布にもとづいて、この気体の圧力 $p = p(T, V, N)$ およびエネルギー $E = E(T, V, N)$ を計算せよ。ただし、分配関数についての公式や熱力学関係式は自由に使ってよい。

問題 II N 個のスピン σ_i , ($i = 1, 2, \dots, N$), がある。ここで、 $\sigma_i = 1$ または $\sigma_i = -1$ であり、 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ と記す。各々のスピンに対して、外部磁場 h が作用するときのハミルトニアンを

$$H(\sigma; h, N) = -\mu h \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (1)$$

と仮定する。 $\mu > 0$ は磁気モーメントである。スピン配置 σ が温度 T のカノニカル分布に従うとする。このカノニカル分布における A の期待値を $\langle A \rangle_{T,h}$ と記す。スピン配置で決まる磁化 $M(\sigma)$ を

$$M(\sigma) \equiv \mu \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (2)$$

で定義する。以下の間に答えよ。

(i) $\langle M \rangle_{T,h}$ を計算せよ。

(ii) 等温帯磁率を

$$\chi(T) \equiv \left. \frac{\partial}{\partial h} \langle M \rangle_{T,h} \right|_{h=0} \quad (3)$$

で定義する。 χ を求めよ。

(iii) 現実の磁性体では、ある温度 T_c が存在して等温帯磁率が

$$\chi(T) \simeq \frac{1}{|T - T_c|^\gamma} \quad (4)$$

のように発散する場合がある。このような特異性を統計力学で記述するための模型について紹介し、その模型で特異性が生じる可能性について簡潔に議論せよ。

問題 III 成績評価に関するレポート課題 II において、長さ L の 1 次元箱に閉じ込められた N 個の剛体球について統計力学をもちいることで状態方程式を

$$p = \frac{Nk_B T}{L - Nb_1} \quad (5)$$

と計算した。ここで b_1 は球の直径である。これに関連して、以下の問に答えよ。

(i) N 個の剛体球を体積 V の 3 次元の箱に閉じ込めた場合、 b_3 を球の体積として

$$p = \frac{Nk_B T}{V - Nb_3} \quad (6)$$

となるのは正しいかどうか？ そう判断した理由とともに答えよ。

(ii) N 個の粒子を体積 V の 3 次元の箱に閉じ込めた場合の状態方程式が

$$p = \frac{Nk_B T}{V - Nb} - a \frac{N^2}{V^2} \quad (7)$$

でよく近似される場合、どのような粒子間相互作用があると推測されるか。また、その推測の妥当性を確かめる方法について議論せよ。ただし、 a, b は正の定数とする。