レポート 3

2019/10/15 Shin-ichi Sasa

問題 I. i 番目の微粒子（質点）の位置を $\boldsymbol{r}_i$, 運動量を $\boldsymbol{p}_i$ と書き、そのミクロな力学状態を $\Gamma = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_N)$ と記す。この系のハミルトニアンを

$$H(\Gamma; V, N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\boldsymbol{p}_i|^2}{2m} + \sum_{i<j} V_{\rm int}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) + \sum_{i=1}^{N} V_{\rm wall}(\boldsymbol{r}_i; V) \tag{1}$$

と表わす。$V_{\rm int}(r)$ は粒子間距離が r のときの相互作用ポテンシャルで $V_{\rm wall}(\boldsymbol{r}_i; V)$ は壁との相互作用ポテンシャルをあらわす。

$$\Omega(E, V, N) \equiv \int d\Gamma \theta(E - H(\Gamma; V, N)) \tag{2}$$

および、

$$\Sigma(E, V, N) \equiv \frac{\partial \Omega(E, V, N)}{\partial E} \tag{3}$$

を定義する。

(1) 講義で例としてとりあげた、$V_{\rm int} = 0$ とみなしてよい状況を考える。また、$V_{\rm wall}(\boldsymbol{r}_i; V)$ は粒子を立方体に強く閉じ込める効果として扱う。熱力学極限において、

$$\log \frac{\Omega(E, V, N)}{N!} = \log \frac{\Sigma(E, V, N)}{N!} + o(N) \tag{4}$$

を示せ。

(2) ある $\omega(u, v)$ が存在して、熱力学極限で

$$\log \frac{\Omega(E, V, N)}{N!} \equiv N\omega\left(\frac{E}{N}, \frac{V}{N}\right) + o(N) \tag{5}$$

となることを仮定する。このとき、熱力学極限で

$$\log \frac{\Omega(E, V, N)}{N!} = \log \frac{\Sigma(E, V, N)}{N!} + o(N) \tag{6}$$

を示せ。