

はじめに 昨日の熱力学の講義の途中で質問がでた。

「力はベクトルなのに、単位面積あたりの力である圧力はベクトルじゃないのですか？」

講義1回目として、熱力学の全体像や講義の目標を説明することを目的にしており、「熱学と力学の統一理論としての熱力学」を熱く語りおえたときの質問だった。圧力という力学世界で定義される量と熱容量という熱学世界で定義される量が独立でない！片方を決めれば、もう片方のある部分が決まってしまう。こういう相互乗り入れこそが熱力学の本質である、という（いつもの）説明をしていた。高校までで圧力 p は習得しており、それに従ってスカラーとして表記したが、力学で決まるなら、ベクトルじゃないのか、と思ったのかもしれない。大学1回生として自然な質問なのだが、記憶する限り今まで受けたことはない。咄嗟に、

「単位面積あたりに働く力という量はそもそもテンソルなのだが、気体液体のように等方的な場合には、単位テンソル成分しかないので、スカラーと考えて良い」

という答えが頭に浮かんだが、相手は大学1回生であり、それをそのまま伝えるわけにはいかない。テンソルであることをいうために絵をかいて説明しはじめたが、そもそも行列をならっていない、ということに思い至り、その説明では伝わらないことを意識してしまった。結局、

「パスカルの原理によって、気体や液体では壁に対してつねに垂直な向きに力をおよぼすので、スカラー量のように考えて良い」

という説明で濁してしまった。やや悔いが残ったので、このノートに最低限の解説を書くことにした。

応力 ある点 P での気体の圧力は、点 P を通過する微小な面領域 A を決め、その面に及ぼす単位面積あたりの力として定義される。この定義をよく読むと、その圧力の定義には「微小な面領域 A 」を決める必要があることがわかる。点 P を通過する面領域 A はその法線ベクトル \vec{n} によって指定される。面領域 A に気体がおよぼす力を \vec{f} とかく。 \vec{f} は面の選び方に依存する。例えば、球形の容器に入れたときと立方体の容器に入れたときでは、気体が容器に及ぼす力の向きは違うのである。（つねに壁に対して垂直なので。）

そこで面の選び方に依存しない量を考える。ベクトルを $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ のように成分表示する。これらをまとめて n_i とかく。添字 i は (x, y, z) のいずれかをあらわす。 \vec{f} に対しても同様である。このとき、面領域 A の面積を $|A|$ と書いて

$$f_i = \sum_j \sigma_{ij} n_j |A| \quad (1)$$

となる σ_{ij} を考える。正確には、面領域は微小な極限を考える。 σ_{ij} は添字がふたつある¹物理量なので、矢印として表現される物理量であるベクトルとはタイプが違う。初めて見たときは面食らうかもしれない。しかしながら、特別な \vec{n} を選ぶことで各々の成分の意味は了解できる。例えば、 σ_{xy} とは、 y 方向に垂直な面に及ぼす単位面積あたりの力の x 成分である。そして、より大事なことは、ベクトルに対して「対象」 \vec{f} と「特定の座標系に依存した成分表示」 f_i があったように成分表示 σ_{ij} に対応する「対象」 $\hat{\sigma}$ がある。この対象を数学的に物理的に納得するには、少し時間が必要かもしれない。テンソルと呼ばれる量であり、その意味についてはゆっくりと勉強されたい。 $\hat{\sigma}$ は応力テンソルとよばれる。面に働く力を考える際には、まず応力テンソル $\hat{\sigma}$ があって、面を指定する \vec{n} に応じて、(1) によって力が分かる、という風に考える。その意味で、 $\hat{\sigma}$ の方が本質的である。

圧力 さて、静止した気体や液体では、応力テンソルは座標系をどのように選んでも変わらないという性質（等方性）がある。これがパスカルの原理である。数式で表現すると

$$\sigma_{ij} = p \delta_{ij} \quad (2)$$

になり、このスカラー p が圧力である²。(1) と (2) がベクトルである力 \vec{f} とスカラーである圧力 p の関係を示している。

¹ 「足が2本ある」ともいう。

² 超絶マニアックなことを書くと、気体と液体が共存する状態においては、気液界面での応力の値は、等方的でない。