

# 35. 臨界点物理学とパラダイムの転換

川 崎 恭 治

## 35.1 は じ め に

科学史家トーマス・クーンの定義によればパラダイムとは「一般に認められた科学的業績で、一時期の間、専門家に対して問い方や答え方のモデルを与えるもの」である<sup>1)</sup>。マックスウェル、ボルツマン、ギブス等によりはじめられた統計力学は原子、分子などの微視的構成要素の性質から熱力学や流体力学などの巨視的法則を導き出すことを目的とする1つの確立したパラダイムである。当然相転移や臨界現象もこのパラダイムの枠内で研究された。しかし臨界現象の最終的解決はこのパラダイムを捨てることによって可能となった。以下ではこの間の事情について概説し、精密実験の最前線にも触れる。

## 35.2 静的臨界現象

20世紀が始まる前後に現われた初期の相転移の理論は出発点として体系の微視的描像を採用した。物質の原子模型すら確立されていなかった時代のことであるから、相転移を引き起こす系の微視的要素（粒子や磁気モーメント等）間の相互作用の微妙な役割を正確に取り入れることは到底望むべくもなかった。しかしながら、各粒子（あるいは磁気モーメント）に働く力をすべてその平均値で置きかえる、いわゆるセルフコンシステントな平均場の理論は相転移の本質を定性的にはあるが驚くほど正しく捉えることに成功した。こうして今で言う対称性の自発的破れを含む理論ができ上がっていた。また臨界点の数学的特異性を表わす臨界指数の値が、現在の記号で表わせば、 $\alpha=0$ 、 $\beta=1/2$ 、 $\gamma=1$ 、 $\delta=3$ と求められていた。しかしこれで相転移が微視的に理解されたと人々が納得したわけではない。この理論が余りにも単純すぎることは、たとえば臨界指数の値が系の空間次元にも依らない、すなわち1次元系でも同じ臨界指数を持つ相転移がおくと主張することから想像される。したがって、相転移の発生機構をより確実に理解するための一見簡単な数学的模型、すなわちイジング模型が作られた。この一見簡単な模型を正確に扱って相転移を理解することはそう簡単ではなく、最初は相転移を示さない1次元の場合しか取り扱えなかった。この模型が提出されてから20年近く経た1944年にやっと2次元模型の磁場ゼロでの振る舞いがオンサーガーによって解明された。この仕事の反響は大きかった。ここで初めて相転移が微視的に理解し得ることを人々が納得した。また、ここで出された臨界指数は

$\alpha=0$  (ただし対数発散),  $\beta=1/8$ ,  $\gamma=7/4$ ,  $\delta=15$  となり\*<sup>1</sup> 平均場理論の値との明確な違いが明らかになった。一方この仕事に見られる強力な数学を用いれば3次元系を含む相転移の詳細が理解されるであろうと言う幻想を人々に植えつけた。これは今日に続いている。

これまで辿った相転移研究の歴史は統計物理学の正統的な立場、すなわち出発点として微視的な描像を採用する立場に立っていた。これらとは独立に1936年にロシアのランダウによって全く異なる立場に立った理論が展開された。そもそも相転移論の目標は相転移に際して示される熱力学的諸量の数学的特異性、たとえば気-液相転移の臨界点における圧縮率の発散、の詳細を説明することである。その出発点は当然特異性を含んではならない。明らかに微視的模型そのものはそのような特異性を含まない。それでは、微視的模型は特異性を含まない唯一の出発点であろうか？ 統計物理学の正統的な立場に固執することを止めれば答えは否である。それならば、考え得る最も単純な特異性を含まない出発点は何か。ランダウはこう問うたはずで、その結果熱力学的ポテンシャル関数に秩序変数を余分な独立変数として加えた関数—ランダウ関数と呼んでおく—を出発点に採用した。熱力学的ポテンシャルを得るには他の変数を固定して新たに加えた秩序変数を動かしてランダウ関数の極小を求める。ランダウ関数は特異性を含まないとしているから、臨界点近傍で、独立変数について通常のテーラー展開が可能である。しかし、極小条件を決める方程式は特異的な解を除外しない。ランダウはこれだけの手順で前述の古典的臨界指数 $\alpha=0$ ,  $\beta=1/2$ ,  $\gamma=1$ ,  $\delta=3$ を持つ相転移の存在を示した\*<sup>2</sup>。後の発展を考えた時に見過ごしてはならないのは、パラダイムの転換と言ってもよい立場の変更がここで起こったことである\*<sup>3</sup>。それではこの新しい立場で臨界指数の問題をどう考えるのか？ ランダウ理論でなぜ古典的な臨界指数しか出てこないのか？ ランダウ理論には熱力学的変数（示強変数，示量変数）しか現われないから、その揺らぎが無視できる故にランダウ関数の極小をとる手続きに問題はない。問題はランダウ関数が特異性を示さない要請した点にある。しかし、これを改良する余地はない\*<sup>4</sup>。後に次のステップの種になるべき発展が別の所から現われた。1950年にランダウ流の理論を超伝導に応用するためにギンズブルグとランダウは元のランダウ理論を空間的に不均一な秩序変数の分布を許す形に拡張

\*<sup>1</sup> ただし  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  の値はこのオンサーガーの仕事を元にして後で別の人々によって求められた。

\*<sup>2</sup> これと同じ臨界指数を与えるランダウおよびそれ以前の理論を相転移の古典論と呼ぶ。

\*<sup>3</sup> P. Hohenberg はある講演で臨界現象の繰り込み群理論の発見がパラダイムの転換と見なせるのかについて考察し、否定的な見解を示した。筆者もこれに同意する。本当のパラダイムの転換は、ここで述べたように、はっきりそれと認識されることなく、その40年程前に既に起こっていた。

\*<sup>4</sup> かつて特異性を含むテーラー展開を試みた人がいたが、ランダウ理論の精神から言って全くナンセンスである。

した。ランダウ関数に対応するものは、場所に依存する局所的秩序変数及びそのグラジエントを含む場としての秩序変数の汎関数である。これをギンズブルグとランダウの頭文字を取って GL 汎関数と呼ぶ<sup>\*5</sup>。これ自体は元のランダウ理論の精神に沿って臨界点で特異性を含まない。GL 汎関数と通常の熱力学的ポテンシャルとの関係は GL 汎関数を秩序変数の場について極小にする条件を課することによって得られる。

この GL 理論によって得られる臨界指数は元と同じ古典的な値を持つ。その他に秩序変数の場の揺らぎの空間相関や臨界温度以下で異なった秩序変数の値を持つドメインの間の界面を議論することができる。

こうして見るとランダウ理論と GL 理論は後者が前者の拡張と言うだけで同じ性格の理論であると思われるかもしれない。しかし、実は基本的な性格の違いがある。そこで GL 理論が古典的臨界指数しか与えなかった理由について考えてみる。そのためには GL 理論が連続体的な場の理論の形をとっていることの意味を振り返る必要がある。このような場の理論は物性物理ではイジング模型のような微視的模型を空間的に粗視化することによって得られる。この際の粗視化のスケールすなわち体系を仮想的な微小なセルに分割する際のセルのはどう取るべきであろうか？ 結果として連続体的な場の理論を得るためには各セルは非常に多くの粒子（結晶であれば格子点）あるいはスピンを含まなければならない。一方大きさの上限として全系のそれより充分小さくしなければならない。また臨界揺らぎの相関距離よりも小さいことが要求される。そうでなければ 1 つのセル内部で相転移が起きてしまい、秩序変数を連続体的場として表わすことは不可能である。大事なことは、セルの大きさを体系の大きさとは無関係に有限にとることである。ここで体系の大きさを無限大にする、すなわち熱力学的極限を取るとは明らかにセルの数を無限大にすることである。こう見てくると、GL 汎関数を秩序変数の場について極小にする手続きで無視された揺らぎが今度は有限の補正を与える。正しくは GL 汎関数をエネルギーと見立てたボルツマン因子を重みとして秩序変数について汎関数積分を行い揺らぎの効果を取り入れる。次にもう 1 つの要請であった GL 汎関数が臨界点で特異性を含まないか検討する。ここで重要なことは臨界点での特異性はもっぱら波長がミクロから無限大にわたる臨界揺らぎの作用による点である。一方 GL 汎関数を決めるとは秩序変数の空間分布を固定することである。これはセルの大きさを超える波長を持つ臨界揺らぎを固定することになる。すなわち GL 汎関数には臨界揺らぎの効果は入らない。言い換えれば GL 汎関数が臨界点で特異性を持たないと要請したことは妥当であった。

これまで述べたことから次に進むべき道は明らかである。すなわち既に述べたように特異性を持たない GL 汎関数で作ったボルツマン因子を汎関数積分して熱力学的ポ

<sup>\*5</sup> 実はこれと同等な理論がファンデルワールスによって液体表面の密度分布を議論するために導入されていた<sup>2)</sup>。

テンシヤルを計算すればよい。しかし相転移の問題では、GL 汎関数が局所的秩序変数のグラジエントと非線型項を同時に含むのでこれをまともに実行することは一般に不可能である。したがってこの方向も行き止まりになった\*6。

これと独立に 1960 年代に入ってから新たな動きがあった。臨界指数そのものを求めることは無理であるとしても、これらについての一般的な性質、特に異なった指数の間の関係について何か言えないかが問われた。そこにあるのは、これらすべての指数は独立ではなく、これらを決めるより根源的な原因があるはずであるとの予想である。典型的な臨界点は磁場と温度のような 2 つの熱力学的示強変数で指定できる。臨界点の極く近傍においてこれらの変数の臨界点での値からの差、すなわち臨界点からの距離に注目する。この際臨界点では臨界揺らぎの空間的広がり、すなわち相関距離が発散することを思い起こす。今我々が体系から段々目を離して見ると次々に体系の細かな様子が見えなくなっていく。臨界揺らぎの相関距離もちょうど臨界点を除いて縮小して見える。これは臨界点からの距離が増大したように見えることを意味する。この様子をもっと定量的に 2 つの指数を用いて表現すると全ての臨界指数がここで導入された 2 つの指数を用いて表わされる。前述した根源的な原因とはここで説明した熱力学的変数のスケール変換に対する体系の応答の仕方である。これがカダノフその他によるスケーリングのアイデアである。ここには微視的視点のかけらも見られない。

スケーリングの考えを応用すれば臨界点近傍では先程不可能だと言った汎関数積分を実行することが可能になる。臨界点近傍の特徴はあらゆる波長の臨界場揺らぎが関与することである。それゆえにこの汎関数積分を揺らぎの波数の区間を小さく区切った無数のステップに分割することが可能である。各ステップの積分を実行することは特異性とは関係なく実行可能である。あるステップでの汎関数積分を実行することは長さのスケールの変更と見なすことができ、しかも各ステップの積分は関係する変数のスケールを変えるだけで手続き的には同じになる。臨界点の特異性は臨界点に近づくにつれて必要なステップの数が無限大に近づくと言う形で現われる。これがウィルソンに始まる臨界現象のくりこみ群理論の骨子である。これらの研究によって臨界現象を特徴づける性質としてユニバーサルな性質と非ユニバーサルな性質があることがわかった。前者は臨界指数の値のように個々の体系に依らない普遍的な性質で後者は臨界温度のように物質固有の値を持つ。もちろん臨界現象の研究で基本的なのはユニバーサルな性質である。これに依って臨界現象を示す種々の体系を同じユニバーサルな性質を持つユニバーサリティクラスにグループ分けすることができる。くりこみ群

\*6 Hohenberg 氏の話では、彼がかつてロシア滞在中この汎関数積分の実行が真剣に試みられたが成功した人は居なかった。GL 汎関数と紛らわしいものに古典系の密度汎関数理論に出てくる汎関数がある。後者は不均一な外場の下での平衡状態の自由エネルギー汎関数をルジャンドル変換して得られた密度の汎関数で、全ての揺らぎは既に取り込まれている。

理論は臨界現象の本質とも言うべきユニバーサルな性質についての精密な予言を可能にし、これまで得られた結果は実験的にも充分検証されてきた。

### 35.3 動的臨界現象

動的臨界現象の研究の歴史は古い、1869年に臨界点の存在が確立されてほどない1882年に臨界領域での粘性係数測定が報告されている。また今世紀初頭には気体液臨界点近傍での熱伝導度の異常な増加が報告された。その後も同様な実験が次々に報告されてきた<sup>3)</sup>。液体の輸送現象は理論的に最も難しい問題の1つで、これらの実験結果は長いこと理解されなかった。

一方、動力学についても前節で述べた道筋が大よそ当てはまる。GL理論から動力学のための最も安直な出発点を得るにはGL汎関数を局所的秩序変数について汎関数微分を取ったものを熱力学的駆動力に見立てて局所的秩序変数の時間変化を決める方程式が得られる。これが時間に依存したGL方程式、いわゆるTDGL方程式である。しかしこれでは多くの実験事実を説明できないことがわかった。たとえば気-液転移の臨界点近傍における熱伝導度の発散はこの模型からは出てこない。この発散の原因は、臨界点近傍では大きなスケールの密度揺らぎ、あるいは液体の単位質量に含まれるエントロピーの揺らぎが速度場の揺らぎによって運ばれ、大きな熱の輸送が生ずることによる。このような機構をいれるにはこの方程式に今のべた効果を表わす速度場と液体の単位質量に含まれるエントロピーの揺らぎの積の項および、液体の単位質量に含まれるエントロピーの揺らぎによって生ずる液体内部で働く力を表わす項を追加しなければならない。これらは散逸を伴わないので可逆的モード結合項と呼ばれる。また充分長時間で熱平衡に達することを保証するために熱的揺らぎの項を加えておく。これが動力学におけるGL理論に相当する模型でありこれ自体臨界異常はどこにも含まれていない。これを出発点にしてくりこみ群の操作を施せば種々の輸送係数の臨界異常を含む動的臨界現象の説明が得られる。これが動的くりこみ群理論といわれるもので前節の静的くりこみ群理論が現われてすぐ動的現象への応用がなされた。実際、動的くりこみ群理論は静的性質も同時に繰り込むことになるので、これで静的、動的性質両方を同時に取り扱える理論の枠組みができた。

歴史的に見れば、くりこみ群理論が現われる前に動的臨界現象の理論は作られていた。当時は静的臨界現象についての理解が完全でなかったので、理論に現われる静的性質についてはインプットとして理論に組み込む方法が取られた。これが現在モード結合理論と呼ばれているものである<sup>\*7)</sup>。出発点の方程式は動的くりこみ群理論のものとほぼ同じであるが後者に入る静的性質はすべて特異性を含まないGL汎関数から導

<sup>\*7)</sup> 微視的模型から離れて長波長の揺らぎのみで輸送係数を計算する可能性を示したのはM. Fixmanが最初である。現在あるような理論の枠組みは筆者に依る。

かれており、前述したように特異性を含まない。

これらの動的臨界現象に対する出発点の方程式は粗視変数（すなわち相転移の秩序変数およびそれ以外の保存量）の場に対する一般化された非線型ランジュバンまたはフォッカー-プランク方程式の形を取る。これらを使って臨界点近傍における種々の輸送係数や秩序変数の時間-空間相関関数を計算することができる。動的臨界現象にも動的臨界指数などのユニバーサルな性質とそうでない性質とがある。これらについての大よその結果を理解するにはモード結合理論で充分間に合うがユニバーサルな性質の最も精密な結果を得るには動的くりこみ群理論によらなければならない。

ここで輸送係数の臨界異常には先に述べた可逆のモード結合が深く関与し出発点の方程式に入っていた輸送係数（これを裸の輸送係数と称する）に臨界異常を含む付加項（場合によっては掛け算の形で入る）を生ずる。これらを輸送係数の繰り込みと呼んでいる。すなわち現実には観測される輸送係数は両者を加えたものである。これをくりこまれた輸送係数と呼ぶ。

これに関連して、一般に見遇ごされてきた点について述べる。流体力学方程式に代表される巨視的法則は歴史も長く確立された法則と考えられている。しかしそこに非線型項があると思わぬ問題に出くわす。一般に同じ空間の点に関係する2つの場の量の積の定義は数学的には自明のように思われるがこれらが物理の巨視的法則に現われる量の場合はそうではない。この積のフーリエ成分は波数ベクトルについての積分を含む。この上限は数学的には無限大だが今の場合、粗視化の長さによって決まる。一方繰り込まれた輸送係数もまた粗視化の長さに影響される：繰り込みは粗視化の長さよりも短波長の揺らぎについてのみ取る。一方粗視化の長さの選択はミクロとマクロの間であれば任意である。故に確立されたと思われる巨視的方程式にも任意性があることになる。しかし通常の場合この事の影響は数値的には問題にならず、これはアカデミックな問題に過ぎない。しかし臨界点近傍ではこれら巨視的法則にとってミクロとみなされてきた長さが臨界揺らぎの相関長まで伸びてくる。したがって通常の巨視的法則が成り立つ範囲は臨界点に近づくほど狭くなり丁度臨界点でゼロになる。これを無視して粗視化の長さを臨界揺らぎの相関長以下にとると得られた“巨視的法則”は選ばれた粗視化の長さに敏感に依ってくることになる。

### 35.4 古典液体の動的臨界現象

動的臨界現象における上述のモード結合理論および動的くりこみ群理論の最も詳細な検証は古典液体（一分分液体では、気液相転移で、溶液では相分離転移において）でなされた。したがって、ここでこれらについて多少詳しく説明する。またこの2つの系はおなじユニバーサリティクラスに属するのでここでは、断らない限り一分分液体を考える。

モード結合理論の出発点は次の非線型ランジュバン方程式で与えられる：

$$\frac{\partial}{\partial t} s_{\mathbf{k}}(t) = -\frac{\lambda_0}{\rho_0 c_p(\mathbf{k})} k^2 s_{\mathbf{k}}(t) - i\mathbf{k} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} s_{\mathbf{q}}(t) \mathbf{v}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}(t) + R_{\mathbf{k}}(t) \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(t) = & -\frac{\eta_0}{\rho_0} k^2 \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(t) - \frac{T}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} [c_p^{-1}(\mathbf{q}) - c_p^{-1}(\mathbf{k}-\mathbf{q})] \\ & \times i \left[ \mathbf{q} - \frac{\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}) \right] s_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}(t) s_{\mathbf{q}}(t) + R_{\mathbf{k}}(t) \end{aligned} \quad (1b)$$

ここで  $s_{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$  はそれぞれ単位質量当たりの局所的エントロピーと局所速度場のフーリエ成分,  $\rho_0$  は平均密度,  $\lambda_0$ ,  $\eta_0$  はそれぞれ“裸の”熱伝導度および粘性係数である.  $c_p(\mathbf{k})$  は波数に依存する単位質量当たりの定圧比熱を表す. これに対しては通常オルンスタイン・ゼルニケ型と言われている  $c_p(\mathbf{k}) = c_p(\mathbf{k}=0)/[1 + (k\xi)^2]$  が採用される. ここで  $\xi$  は臨界揺らぎの相関長で臨界点で発散する. さらに微視的揺動力  $R_{\mathbf{k}}(t)$ ,  $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(t)$  は次の揺動散逸関係を満足する：

$$\langle R_{\mathbf{k}}(t) R_{-\mathbf{k}}(t') \rangle = 2k_B T \lambda_0 k^2 \delta(t-t') \quad (2a)$$

$$\langle \mathbf{R}_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{R}_{-\mathbf{k}}(t') \rangle = 2k_B T \eta_0 (k^2 \mathbf{1} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \delta(t-t') \quad (2b)$$

(1) はノイズと非局所性を除いて流体力学の式と同じ形をしているが、内容は異なっている. むしろ、気体のボルツマン方程式と同様なメソスケールレベルの方程式と解すべきである. マクロな法則は、以下で示すように、これをもう一段粗視化することによって得られる.

(1) 式は非線型項があるために厳密に解くことはできない. この非線型項をセルフコンシステントに処理することによって“くりこまれた”波数に依存する熱伝導度  $\lambda(k)$  と粘性係数  $\eta(k)$  を決める方程式が次のように求められる：

$$\Delta\lambda(k) = \frac{k_B T}{k^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} \left[ k^2 - \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} \right)^2 \right] \frac{c_p(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{q^2 \eta(q)/\rho_0 + |\mathbf{q}-\mathbf{k}|^2 \lambda(\mathbf{q}-\mathbf{k})/\rho_0 c_p(\mathbf{q}-\mathbf{k})} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} \Delta\eta(k) = & \frac{k_B T}{6k^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} \left[ q^2 - \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{k} \right)^2 \right] c_p(\mathbf{k}-\mathbf{q}) c_p(\mathbf{q}) \\ & \times \left( \frac{1}{c_p(\mathbf{q})} - \frac{1}{c_p(\mathbf{k}-\mathbf{q})} \right)^2 \\ & \times \frac{1}{q^2 \lambda(q)/\rho_0 c_p(q) + (\mathbf{k}-\mathbf{q})^2 \lambda(\mathbf{k}-\mathbf{q})/\rho_0 c_p(\mathbf{k}-\mathbf{q})} \end{aligned} \quad (3b)$$

ここで左辺はくりこまれた輸送係数から裸の部分差し引いたものでそれにデルタをつけて表わした.

この方程式を解くのは簡単ではないが、第ゼロ近似として、粘性係数の弱い臨界異常を無視して  $\eta(k) = \eta_0$  と置く. また (3a) の分母第2項を無視する. これによって  $s_{\mathbf{k}}$  の減衰率  $\Gamma_{\mathbf{k}}$  に対する閉じた表式が得られる：

$$\Gamma_k \equiv k^2 \frac{\lambda_0}{\rho_0 c_p(\mathbf{k})} + \Delta\Gamma_k \quad (4a)$$

$$\Delta\Gamma(\mathbf{k}) = \frac{k_B T k^2}{6\pi\eta_0 \xi} \Omega_0(k\xi) \quad (4b)$$

$$\Omega_0(x) \equiv \frac{3}{4x^2} [1 + x^2 + (x^3 - x^{-1}) \tan^{-1} x] \quad (4c)$$

ここで  $\Omega_0(x)$  は第ゼロ近似のスケール関数．これらは長波長 ( $k\xi \ll 1$ ) では熱伝導のフーリエ則を与える．熱伝導度  $\lambda(k=0)$  は臨界異常項  $\Delta\lambda = (k_B T / 6\pi\eta_0) (\rho_0 c_p / \xi)$  を含む． $c_p$  はよい近似で  $\xi^2$  のように振る舞うことから  $\Delta\lambda \propto \xi$  と言う簡単な結果を得る．一方波長が短くなるにつれて ( $k\xi \geq 1$ ) フーリエ則から大きくずれて行くことがわかる． $\Gamma_k$  は臨界液体からの光散乱におけるレーリ一線巾として直接実験的に検証できる．その初期の実験結果と理論式の比較については文献4) 図5.2を見よ．

実は実験と第ゼロ近似の理論との比較を詳細に検討すると、一致は図に示したほど良くなくて、第ゼロ近似を改良する必要性が出てきた．これらは主にメリーランド大学のフェレル教授を中心とするグループによって精力的になされて来た．以下では粘性係数を中心に最近の発展を概観する．まず (3b) の右辺に第ゼロ近似の結果を代入すると、小さい  $k\xi$  において  $\Delta\eta = \eta_0 (8/15f^2) \ln(\xi/\xi_0)$  となる．ここで  $\xi_0$  は波数積分の上限から来る微視的な長さである．これで与えられる粘性係数の臨界異常は臨界点に実験的に近づき得る温度領域（無次元の温度差で  $10^{-7}$  位まで）で  $\eta_0$  を凌駕することはない．したがってこの  $\Delta\eta$  の結果は  $\eta_0$  に対する1次の補正と考えこれを

$$\eta(k=0) = \eta_0 (\xi/\xi_0)^{z_\eta}, \quad z_\eta \equiv 8/15\pi^2 \quad (5)$$

の小さな指数  $z_\eta$  についての展開の最初の項と見なす．しかし粘性係数はバックグラウンドの寄与が大きいのので臨界点の極く近傍で成り立つ (5) を臨界点から離れた領域での式に滑らかに繋ぐ必要がある．そのためにまず (3b) の右辺に入る  $\lambda(k)$  に有限なバックグラウンドの寄与  $\lambda$  を付け加え、その効果を波数  $q_c$  で表わす．次にモード結合方程式 (3) 右辺積分はあるミクロな波数  $q_D$  でカットオフされるべきことを考慮する．これらを取り入れると (5) 式の  $\xi/\xi_0$  は適当なクロスオーバー関数  $H(q_c\xi, q_D\xi)$  で置き換えられる<sup>5)</sup>．次に粘性係数の振動数依存性を考慮する<sup>6)</sup>．理由は熱伝導度では (3a) の右辺が早く減衰する粘性緩和で支配されているのに比べ (3b) の右辺はより遅く減衰する  $s_k$  の緩和で支配されるので振動数により敏感になる．これを入れるには (3b) の右辺の分母に  $-i\omega$  を挿入する．その結果は (5) に因子  $S(z)^{-z_\eta/(3+z_\eta)}$  を掛けて表わされる．ここで  $S(z)$  はスケール関数で  $z \equiv -\frac{i\omega}{2} \frac{6\pi\eta\xi^3}{k_B T}$ ．スケール関数は  $S(0)=1$  で、 $|z| \rightarrow \infty$  で  $|S(z)| \sim |z|$  の性質を持つ．この最後の結果はスケール則と  $\Gamma_k \sim k^{3+z_\eta}$  になることを使った．一方  $z_\eta$  については前述の単純なモード結合理論では  $z_\eta = \frac{8}{15\pi^2} \cong 0.054$  となるが、実験値にくらべ小さく、問題になって



いたが改良された計算では  $z_\eta \cong 0.067 \pm 0.002$  と与えられている<sup>7)</sup>。これらを総合して、臨界点近傍での振動数に依存した粘性係数は次式で与えられる：

$$\eta(\xi, \omega) = \eta_0(T, \rho) \exp[z_\eta H(q_c \xi, q_D \xi)] \left[ S \left( -\frac{i\omega}{2} \frac{6\pi\eta\xi^3}{k_B T} \right) \right]^{-z_\eta/(3+z_\eta)} \quad (6)$$

粘性係数は臨界点で極く弱い発散しか示さず、重力効果のために地上での実験では大きなバックグラウンドの上に臨界点の極く近くでわずかばかりの増加がみられるに過ぎない<sup>8)</sup>。文献4) 図8.1に実験の図が引用されている。したがってこの式と実験結

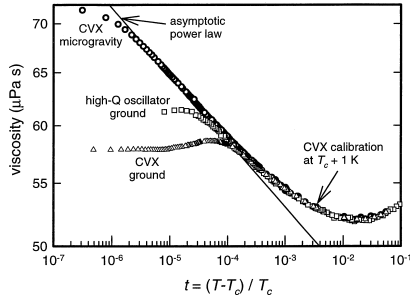


図 1 クセノンの臨界点近傍の粘性係数の地上および衛星内での測定結果。文献<sup>9)</sup>から転載。

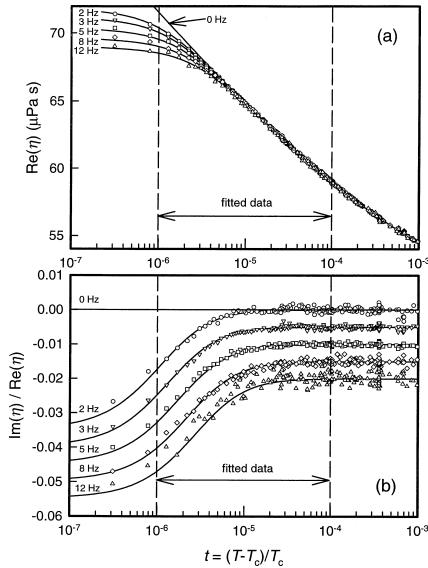


図 2 有限振動数の下でのクセノンの臨界点近傍の粘性係数。(a) は実部 (散逸部分), (b) は虚部 (非散逸部分)。文献<sup>9)</sup>から転載。

果との比較は動的臨界現象の理論の最も厳しい検証になる。実験を精密化して両者を厳しく比較することの意義は大きい。最近スペースシャトル内の無重力環境を利用した粘性係数の温度、振動数依存性の精密測定および、理論との比較が報告された<sup>9)</sup>。その結果を図1、図2に示す。地上の実験との差が歴然としている。スケール関数  $S(z)$  に振動数のスケール因子  $A=2.0\pm0.3$  を掛けておけば実験は理論と非常に良い一致を示している。このスケール因子の原因は今の所不明だが1つには理論の精度を上げることによって解決される可能性が臨界点近傍での音波吸収の場合を持ち出して指摘されている<sup>9)</sup>。

### 35.5 今後の問題点

これまで見て来たようにスケーリング、ユニバサリティと言う言葉に代表される臨界点物理の最も深い理解の出発点になったのは、統計物理学の見方に対するパラダイムの転換とも言うべき視点の変更であった\*<sup>8)</sup>。この視点の変更は臨界現象に留まらず統計物理全般にこれまでの様相の変更を迫る大きな影響を与えた。出発点に取った模型が現実には忠実でなくても、得られる結果は出発点の詳細に依らないと信じられるようになり、出来るだけ簡単な模型で興味ある結果を出すのが1つの流行になった<sup>10)</sup>。また経済学のように基礎方程式が不明の場合でも現象をスケーリング、ユニバサリティの観点から整理することも行われている。今はやりの複雑系と言われるものの考え方にも臨界点物理の影響が認められる<sup>10)</sup>。

一方臨界点は相図の中の一点（相図の次元が多いときはその次元数引く2の次元数を持った空間）に過ぎない。臨界点から外れればバックグラウンドの寄与が一般に無視できなくなり、非ユニバーサルな性質も同時に考慮する必要が出て来る。炭酸ガスでは熱伝導への臨界揺らぎの寄与が臨界温度より40%高温でも認められる<sup>12)</sup>。最近注目されている超臨界流体の理解にはこれが問題になる。ここで無視できないバックグラウンドの寄与については臨界点から離れた所での測定値を外挿して現象論的に処理されている<sup>12)</sup>。臨界点からのクロスオーバーも含めた微視的理論が望まれる。と言ってもこの難問をすべて解析的理論だけで扱えるわけがない。ここで計算機の助けが必要になる。事実計算機は臨界点を除く液体の問題では絶大な威力を発揮している。しかし臨界揺らぎが絡むと問題が生ずる。臨界揺らぎの特徴は相関距離が微視的範囲を容易に逸脱し、数千Åに達し得る。このような系をシミュレートしようとする、

\*<sup>8)</sup> この視点の変更が臨界点物理にもたらした究極の理論が静的くりこみ群理論およびモード結合機構を入れた動的くりこみ群理論である。今では必要であれば、労力を厭わぬ限り、どんな精度でも臨界現象の本質であるユニバーサルな性質を解析的に計算することが可能である。これによって静的、動的臨界現象は基本的に解決したと見なすべきである。一部に未だ残っている「現象論としてのモード結合理論が成功をおさめているが、未だ完全に解決されたとはいえない。」<sup>11)</sup>と言うような見方は30年ほど時代おくれである。

数千万個の粒子を扱わねばならない．ここに解析理論と計算機を組み合わせた新しい発想が要求される問題がある．

一方過冷却液体，ガラス転移，液体の水，溶媒和の動力学，等々の化学物理の諸問題ではモード結合理論で取り入れた分子の集団運動の他に個別運動にも注意を払う必要がある．最近のこのような情勢を見ると，臨界点物理が解明された現在，再び古いパラダイムに戻って微視的観点から考え直す必要が出ているように感じられる．もちろん昔にそのまま返るわけではなく，臨界点物理の経験を踏まえた新しい統計物理の建設が期待されている．（筆者＝かわさき・きょうじ，福岡工業大学エレクトロニクス研究所教授，1930年生まれ，1953年九州大学理学部卒業）

### 参考文献

- 1) トーマス・クーン著，中山 茂訳：『科学革命の構造』（第3版）（みすず書房，1996）．
- 2) D. van der Waals: *Verhandel. Konink. Akad. Weten. Amsterdam* (Sect. 1), Vol. 1, No. 8 (1893), 解説と英訳 J. S. Rowlinson: *J. Stat. Phys.* **20** (1979) 197.
- 3) J. V. Sengers: in *Critical Phenomena*, M. S. Green and J. V. Sengers, eds. (Washington D. C., 1966). J. V. Sengers: in *Critical Phenomena*, M. S. Green, ed. (Academic Press, New York, 1971)
- 4) 川崎恭治：『非平衡と相転移』（朝倉書店，2000）．この解説の詳細についてはこの文献を参照のこと．
- 5) J. K. Bhattacharjee, R. A. Ferrell, R. S. Basu and J. V. Sengers: *Phys. Rev. A* **24** (1981) 1469.
- 6) J. K. Bhattacharjee and R. A. Ferrell: *Phys. Rev. A* **27** (1983) 1544.
- 7) Ferrell 教授私信．この仕事の結果は文献 9, 12) に引用されている．
- 8) R. F. Berg and M. R. Moldover: *J. Chem. Phys.* **93** (1990) 1926.
- 9) R. F. Berg, M. R. Moldover and G. A. Zimmerli: *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 920.
- 10) R. Badii and A. Politi: *Complexity: Hierarchical structures and scaling in physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- 11) 和達三樹：「数理科学」 No. 450 (2000) 29 の 34 ページ．
- 12) J. V. Sengers and J. Luettmmer-Strathmann: in *Transport Properties of Fluids: Their Correlation, Prediction and Estimation*, J. Millat, J. H. Dymond and C. A. Nieto de Castro, eds. (Cambridge University Press, 1996).