

熱力学/2019年度試験 /担当 佐々

2019/07/24 14:45-16:05 実施 教科書・ノート持ち込み不可

問題 I 復元力 f が $f = f(T, x)$ のように温度 T と自然長からの変位 x の関数として表わされている 1 次元ばねを考える。フックの法則を仮定していないことに注意せよ。変位を x に固定したときの熱容量 $C(T, x)$ が (T, V) に関係なく一定値 C_0 をとるとする。このばねについて、以下の問に答えよ。(注: もし、ばねに全く馴染みがなくて解答の見込みがない場合には、復元力 $f = f(T, x)$ を圧力 $P = P(T, V)$ に置き換えるなど気体の問題として適切に問題文を変えて解答することで部分点が考慮される。)

(i) 自由エネルギー F を内部エネルギー U , 温度 T , エントロピー S についての加減乗除であらわせ。

(ii) 内部エネルギー $U(T, x)$ に対して

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_T = -f + T \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_x$$

が成り立つことを示せ。

(iii) $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_x$ と C_0 の関係を記せ。

(iv) この系に対して

$$\frac{\partial^2 f(T, x)}{\partial T^2} = 0$$

が成り立つことを示せ。この結果にもとづいて、以下では、 x についてのある関数 $f_0(x)$, $f_1(x)$ を使って、 $f(T, x) = f_0(x) + f_1(x)T$ と表す。

(v) 任意の x_0, x_1 に対し、 $U(T, x_1) - U(T, x_0)$ を関数 $f_0(x)$ を使ってあらわせ。

(vi) ばねを変位 x まで引っ張って断熱材でくるむ。温度は T_0 とする。ばねを手放すと自然長まで戻り、温度は T になる。このようにして断熱過程 $(T_0, x) \rightarrow (T, 0)$ を実現することができる。最初の状態 (T_0, x) と最後の状態 $(T, 0)$ で等しい物理量は何か。

(vii) 様々な T_0, x に対して、前問の断熱過程の実験を行うことで、 T を測定したところ、

$$T - T_0 = \frac{a}{b} \log \cosh(bx)$$

が成り立っていた。ここで a, b は定数である。この結果から、 $f_0(x)$ を a, b, C_0, x によって表わせ。

(viii) 次に別の実験として、自然長にあるばねを断熱材で囲んでゆっくりひっぱることで断熱準静的過程を実現する。最初の温度を T_0 とし、変位 x のときの温度を $T(x)$ と記すとき、 $\varphi(T(x), x)$ が x に依らず一定になる関数 $\varphi(T, x)$ は何か。

(iv) 断熱準静的過程で得られた温度依存性が

$$T(x) = T_0 \exp(dx^2)$$

のように測定されたとする。 k_1 は定数である。この結果から、 $f_1(x)$ を d, C_0, x によって表わせ。以上により、熱容量、断熱自由過程の温度変化、断熱準静的過程での温度変化の実験から復元力 $f(T, x)$ が決定されたことになる。

(v) 復元力の分解 $f(T, x) = f_0(x) + f_1(x)T$ はマクロな弾性の起源として 2 種類あることを意味している。微視的な視点からでは、 $f_0(x)$ および $f_1(x)T$ をどのように理解するのか議論せよ。

問題 II 体積 V の箱の中に気体が物質質量 N だけ閉じ込められている。この気体の熱容量は $3NR/2$ という一定の値をとっていた。温度 T を変えながら、密度に対する圧力の関数形を求めると

$$P(T, V) = \frac{NRT}{V - Nb} - a \frac{N^2}{V^2}$$

となった。ここで、 a, b は物質の種類に依存する正の定数である。 R は気体定数である。以下の問いに答えよ。

(i) この気体が十分に希薄なとき、理想気体と考えてよい。このとき、与えられた温度 T に対して、「十分に希薄」とは「密度が十分に小さい」ことを意味するが、何に比べて十分に小さいのか。

(ii) 等温圧縮率 κ は

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (1)$$

で定義される。前問の意味で十分に希薄のとき、等温圧縮率を求めよ。

(iii) ある特別な密度 ρ_c に対し、密度を固定したまま十分に高温な状態から温度を上げていくと、ある温度 T_c に近づくにつれ等温圧縮率 κ が発散するように増大する。その特別な密度 ρ_c を求め、 T に対する等温圧縮率の発散の仕方について議論せよ。

問題 III 下図で示されているように3つの領域からなる系を考える。それぞれの仕切り板および全体は断熱されて固定されている。3つの領域は同じ体積 V であり、同じ物質質量 N の理想気体が入っている。温度は T_1, T_2, T_3 のように異なるものとする。このとき系全体が断熱されている条件のもとで、壁を動かしたり、色々な種類の壁を出し入れできるとする。この断熱操作を経たのちに到達する最終的な平衡状態では、3つの領域に同じ体積 V 、同じ物質質量 N 、同じ温度 T の理想気体が入っていることになった。以下の問いに答えよ。

(i) 実現可能な温度 T の範囲を書け。

(ii) 実現可能な温度 T の最小値を実現する操作を具体的に議論せよ。

