

熱力学/2017年度試験 /担当 佐々

2017/07/26 14:45-16:05 実施 教科書・ノート持ち込み不可

問題 I 次の文章を読んで、 に適切な数式を解答に記し、関連する問に答えよ。

ある物質を考える。物質量を固定する。内部エネルギー U をエントロピー S と体積 V の関数として $U(S, V)$ と記すとき、 S, V の微小変化に対する U の微小変化は $dU = \text{あ}$ とかける。ここで、 T は温度で、 P は圧力である。この関数 $U(S, V)$ は熱容量 $C(T, V)$ および状態方程式 $P = P(T, V)$ を一意に決めるという特別な性質を持っており、完全な熱力学関数と呼ばれる。 (T, V) を引数にもつ完全な熱力学関数として、自由エネルギー $F(T, V)$ がある。内部エネルギー $U(T, V)$, エントロピー $S(T, V)$ を使って、 $F(T, V)$ は $F = \text{い}$ と表せる。このとき、 T, V の微小変化に対する F の微小変化は $dF = \text{う}$ と書ける。これらより、例えば、内部エネルギー $U(T, V)$ の体積依存性を状態方程式から決めることができる。

問：関係式

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -P + T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad (1)$$

を導出せよ。

問題 II 体積 V の箱の中に気体が物質量 N だけ閉じ込められている。この気体の熱容量は $3NR/2$ という一定の値をとっていた。温度 T を変えながら、密度に対する圧力の関数形を求めると

$$P(T, V) = \frac{NRT}{V - Nb}$$

となった。ここで、 b は物質の種類に依存する定数である。 R は気体定数である。以下の問いに答えよ。

(i) 内部エネルギー $U(T, V)$, エントロピー $S(T, V)$, 自由エネルギー $F(T, V)$ を求めよ。どの順番でどのように導いてもよいが、導出過程を明示すること。(導出過程そのものに部分点がある。)

(ii) 図 1 のように右にパラメータ b の値が b_1 となる物質、左にパラメータ b の値が b_2 となる物質を封入する。体積と物質量は同じである。最初右の箱の温度を T_1 , 左の箱の温度を T_2 とする。 $(T_1 \neq T_2)$ 全体は断熱されており、仕切り壁も断熱壁である。全体を断熱したまま、何らかの力学操作(壁の出し入れや箱の体積変化)を行ない、最終的にはそれぞれの箱の体積や各々の物質量は全て元にもどったとする。このときの温度変化を $(T_1, T_2) \rightarrow (T'_1, T'_2)$ と記す。ただし、温度変化はあったとし、 $T'_1 \neq T_1$ である。この過程が可逆過程、すなわち、 $(T'_1, T'_2) \rightarrow (T_1, T_2)$ も断熱過程で実現できる場合、 (T'_1, T'_2) を求めよ。また、この操作を明示的に記せ。

問題 III 自然長からの変位 x に対して復元力 f が $f = -k(T)x$ として与えられる 1次元ばねを考える。また、(変位を固定したときの) 熱容量 $C(T, x)$ は (T, x) によらず一定値 C_0 とする。以下の問に答えよ。

(i) 等温環境の下でばねを変位 x までゆっくり引っ張る。自由エネルギー $F(T, x)$ に対して、 $F(T, x) - F(T, 0)$ を求めよ。

(ii) $S(T, x) - S(T, 0)$ を求めよ。

(iii) $U(T, x) - U(T, 0)$ を求めよ。

(iv) $C(T, x) = C(T, 0) = C_0$ より、 $k(T) = k_0 + k_1 T$ となることを示せ。

(v) k_0 の物理的意味を論じよ。また、 $k_0 = 0$ となる状況を説明せよ。

(vi) $k_0 = 0, k_1 > 0$ のばねの復元力の特徴について述べよ。