

## 熱力学・2007年度試験（佐々）

2007/09/03 15:00-16:30 実施 教科書・ノート持ち込み不可

**I.** 体積  $2V$  の箱が断熱材で囲まれており、箱の真ん中に仕切り壁がある。最初、気体が仕切り壁の左側だけに封入されている。以下の問いに答えよ。

(1) 仕切り壁を急に取り除くことにより、断熱自由膨張  $(T, V) \rightarrow (T_1, 2V)$  が実現したとする。 $S(T_1, 2V)$  と  $S(T, V)$  の大小関係を理由とともに記せ。

(2) 仕切り壁をピストンでゆっくり移動することにより、断熱準静的過程  $(T, V) \rightarrow (T_2, 2V)$  が実現したとする。 $S(T_2, 2V)$  と  $S(T, V)$  の大小関係を理由とともに記せ。

(3) 考えている気体を理想気体として、 $T, T_1, T_2$  の大小関係について理由とともに記せ。

**II.** 磁場によって「磁石」の性質をもつ物質を磁性体とよぶ。その性質は、物質中の磁石の大きさ（磁気モーメント）をあらわす磁化  $M$  によって特徴づけられる。明示的には、温度一定 ( $T$ ) の環境で、磁化を  $M_0$  から  $M_1$  までゆっくり変化するのに必要な仕事は

$$\int_{M_0}^{M_1} H(T, M) dM$$

で与えられる。ここで、 $H(T, M)$  は磁化  $M$  の磁性体がおかれている空間の一様磁場に対応する。以下の問いに答えよ。

(1) 自由エネルギーを  $F(T, M)$  と記すとき、関係式

$$dF = HdM - SdT$$

が成り立つことを説明せよ。（第一項の説明だけでよい。）

(2)  $S(T, M)$  を  $F(T, M)$  によってあわせ。

(3) 磁化が一定  $M$  のときの熱容量  $C(T, M)$  を  $S(T, M)$  によってあわせ。

(4)  $T$  が十分大きいとき、 $M(T, H)$  は

$$M = a \frac{H}{T}$$

( $a > 0$ ) を満たすことが知られている（キュリー則）。ただし、 $a$  は定数である。また、同じ状況で

$C(T, M)$  は一定の値  $b (> 0)$  をとる。このとき

$$F(T, M) = \varphi_0(T) + \varphi_1(T)M^2$$

とかける。 $\varphi_0(T), \varphi_1(T)$  をそれぞれ  $a, b$  をつかってあわせ。

(5) 前問の仮定がみたされる範囲で、磁場  $H$  を加えたのち、磁性体を断熱材で囲む。このときの温度を  $T_0$  とする。そのあとで、磁場をゆっくりと小さくしてゼロにする。最終状態の温度  $T_1$  と  $T_0, H$  の関係を求めよ。また、 $T_1$  と  $T_0$  の大小関係について述べよ。

**III.** 一般の温度の磁性体ではキュリー則からずれる。まず、磁場を極端に大きくすると、磁化は飽和値に達する。その定性的な振る舞いは、例えば、

$$M = M_\infty \tanh\left(\xi \frac{H}{T}\right)$$

であらわされる。この段階で、右辺の  $H$  は外から加えた磁場ではなく磁化がつくる磁場の寄与が加わっていると考えるべきである。したがって、 $H$  を外から加えた記号として使うなら、より正確には、

$$M = M_\infty \tanh\left(\xi \frac{H + qM}{T}\right) \quad (1)$$

と仮定するのが合理的である。 $q$  はパラメータである。このような扱いは分子場理論（平均場理論）とよばれる。以下の問いに答えよ。

(1)  $H = 0$  とする。ある温度  $T_c$  が存在して、 $T > T_c$  では (1) 式を満たす  $M$  は  $M = 0$  のみだが、 $T < T_c$  では、 $M = 0, \pm M_*$  の解があらわれる。 $T_c$  を求めよ。

(2) 弱い磁場  $H$  を加えたときの磁化の変化率は帯磁率とよばれる。つまり、帯磁率  $\chi$  は

$$\chi = \left. \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right) \right|_{T, H=0}$$

で与えられる。 $T$  が  $T_c$  がゼロにちかづくとき、 $\chi$  は発散する。(1) 式にもとづいて、その発散的振る舞いを導け。ただし、 $T > T_c$  の場合だけ議論すればよい。