

熱力学/2004年度試験/担当 佐々

2004/09/03 10:50-12:20 実施 教科書・ノート持ち込み不可

I. 形を球に保ったまま変形する風船に気体を封入してふくらませる。以下で述べる実験は、すべて、温度 T 一定の環境で行われているものとする。また、大気圧 P_0 (定数) の影響を考えるものとする。以下の問題に答えよ。

(1) 半径 r の風船をつくるには、表面積に比例する仕事 $\sigma 4\pi r^2$ が必要であると仮定する。 σ は、 r に依存しない定数で表面張力とよばれる。この $\sigma 4\pi r^2$ は、風船の $\bigcirc\bigcirc$ エネルギーである。 $\bigcirc\bigcirc$ にふさわしい言葉は、(i) 内部 (ii) 自由 のどちらか？

(2) 半径 r の風船から半径 $r + \Delta r$ の風船に変形したとき、風船の $\bigcirc\bigcirc$ エネルギーの増分を求めよ。ただし、 Δr が小さいとして、 Δr の 1 次の寄与まで考えればよい。

(3) 風船の中に気体を封入し風船をゆっくり (準静的に) ふくらましていく。風船の半径が r のときの気体の圧力を $p(r)$ とすると、風船は中の気体から圧力 $p(r)$ で外側におされ、大気から P_0 で内側におされている。半径 r の風船から半径 $r + \Delta r$ の風船に変形するとき、風船の中の気体の圧力と大気圧が風船にする仕事を $p(r), P_0, r, \Delta r$ であわせ。ただし、 Δr が小さいとして、 Δr の 1 次の寄与まで考えればよい。

(4) 問 (2), 問 (3) の結果より、 $p(r)$ を P_0, σ, r であわせ。

(5) 封入する気体の (ヘルムホルツの) 自由エネルギー $F_{\text{gas}}(T, V)$ が

$$F_{\text{gas}}(T, V, N) = \frac{3}{2}NRT - NRT \log \frac{T^{3/2}V}{N} \quad (1)$$

と書けるとせよ。この式から、気体の状態方程式と熱容量の式を導びけ。

(6) 気体を物質量 N_1 だけつめると風船の半径は r_1 になった。 N_1 を r_1 であわせ。

II. 同じ球状風船を 2 つ用意し、I. と同じ種類の気体を封入する。ひとつの風船については半径 r_0 まで膨らまし、他方の風船は半径 r_1 まで膨らます。 $(r_0 \neq r_1)$ ふたつの風船を横に並べるたときの平衡状態を Z_1 と記す。ここで、ふたつの風船の口をそろって接触させる。風船中の気体は外部にもれることなく移動し、長時間後には別の平衡状態が実現する。(移動の過程では、一般には平衡状態にない。) 最終的に実現する平衡状態は、同じ大きさの風船がつりあった状態ではありえないことを熱力学の法則から帰結したい。そのためには、状態 Z_1 から同じ大きさの風船が並んだ状態 Z_2 に変化がおけると仮定し、矛盾が生じることを示せばよい。以下の問いに答えよ。

(1) 状態 Z_2 におけるふたつの風船の半径 r_2 を r_0, r_1 であわせ。

(2) 状態 Z_1 においてふたつの風船と内部の気体に対する全自由エネルギーを $F(Z_1)$ 、状態 Z_2 において対応する全自由エネルギー $F(Z_2)$ とする。 $F(Z_1)$ と $F(Z_2)$ を r_0, r_1, r_2 であわせ。

(3) 状態 Z_1 から状態 Z_2 への変化で大気圧がする仕事 $W[Z_1 \rightarrow Z_2]$ を r_0, r_1, r_2 であわせ。

(4) $F(Z_1), F(Z_2), W[Z_1 \rightarrow Z_2]$ の間に成立しなければならない不等式を書け。

(5) 前問の不等式を破る現象がみつければ、人類史上初の発明になる。何を発明したことになるのか？

(6) 問 II-(4) の不等式が破れてしまうことを示したい。簡単のため、大気圧が無視できる状況を考え、 $P_0 = 0$ とおく。このとき、問 II-(4) の不等式は、 $0 \leq q_0 \leq 1, 0 \leq q_1 \leq 1, q_0 + q_1 = 1$ となる q_0, q_1 に対する不等式

$$q_0 \log q_0 + q_1 \log q_1 + \log 2 \leq 0 \quad (2)$$

と等価であることを示せ。

(7) $r_0 \neq r_1$ なら、条件をみたますべての (q_0, q_1) に対して、(2) が成立しないことを示せ。

(*) $P_0 \neq 0$ の場合に不等式が成り立たないことの証明は、家で考えてください。

参考：もし、表面張力が半径に依存しない球状風船が、同じ大きさの風船対にむかっていく... という直感的にありえそうなことが現実におこったなら、それは、人類史上初の発明! になってしまうのです。現在の科学は、この「発明」が (未来にわたっても) おこならないこと前提にしています。身の回りにあるなりげない現象が現代科学の成立基盤と関わるなんて、なんと楽しいことでしょう。