時間の対称性がつなぐミクロとマクロ

佐々　真一

1. 研究の開始

２０１５年７月７日、バンガロールの夜、自動３輪車に乗っていた*1)。ラマン研究所の外で夕食をとり、研究所に戻る途中だった。横倉さん*2)が、何の脈絡もなく、僕に聞いてきた。「熱力学エントロピーを対称性から出す、というような話はないのですか？」あまりにも唐突で何を言っているのか分からなかった。「ブラックホールエントロピーはネーターチャージとして定式化できるので..」*3)と続けたので、「え、どんな変換？」と聞いた。「ディフェオです。」「あぁ、なるほど、そうなのか。これは僕が考えそうな問題なのに、考えたことなかった。」

僕が京大に着任した２０１３年以来、横倉さんは時々僕の部屋で話をしていた。ブラックホールの専門家であるが、流体力学や非平衡熱力学の理解も深く、素朴だが重要な質問を持って来られることが多かった。２０１５年７月当時、横倉さんはバンガロールで研究員をしていた。僕は、毎朝９０分６日間集中で非平衡統計力学の講義をするために、バンガロールに滞在していた。横倉さんはその講義に参加されていたのだ。

通常の講義に加えてインフォーマルなチュートリアル講義を２回夕方にするように現地で要請された。すぐに講義できることは限られている。「エントロピーとは何か」から始め、その拡張可能性を議論する構成なら即興で出来るだろう、とチュートリアル講義に臨んだ。それは会心の出来栄えになって、気分も良かった。横倉さんと夕食に出かけたのはその日だった。バンガロールでは、ラマン研究所内で朝も昼も夜もインドの料理が用意されていた。保守的な僕はインドを楽しむ気など全くなく、１週間の滞在で研究所の外に出たのはそのときだけだった。

夕食では横倉さんと色々な話をしたが、アルコールも入って気が大きくなっていたのだろう。「あるテーマの専門家なら、そのテーマに関する問題は何かしらは考えているはずだ。ほとんどは未解決だとしても。」と偉そうなことを言ったのは覚えている。その矢先に、「熱力学エントロピーを対称性から出す」という問題を考えたことがなかった、と白状することになったので、赤面の極みだった。

すぐに自動３輪車上で考え始めた。熱力学エントロピーには断熱定理による保存則がある。その保存則をネーターの定理によって対称性から特徴づければよい。問題は、その対称性に対応する変換

*1)　この記事は、論文[1]ができるまでのエピソードを中心に書かれている。ただし、あくまで筆者からみたストーリーであり、客観的な記述ではない。また、メールからの引用は全て筆者が発信したメールだけを使っている。しかしながら、共同研究をしている環境下ではお互いに影響を受けており、研究に関するどのようなアイデアも個人に帰着すべきものではない。「僕」という一人称を使った記事であるが、この点についてはあらかじめ了解して欲しい。

*2)　横倉祐貴さんは、２０１４年３月にブラックホールの研究により、京都大学理学研究科で学位を所得され、現在、理化学研究所 iTHES で基礎科学特別研究員をしている。

*3)　僕は、Wald による有名な論文[2]をそのときまで知らなかった。

を探すだけだ。そういう研究は僕が好きなタイプだし、できる気がした。「できるよ。うん、きっとできる。」と自動３輪車を降りる頃には断言した。

次の日、横倉さんに会ったとき、「論文のタイトルを決めたよ。「ネーター定理から熱力学エントロピーへ」でどうだろう。中身はまだないけれど、気分が盛り上がるし。」と半分冗談半分本気で話した。

バンガロールでは講義の他に多くの人と議論をした。夜は疲れ果てて、比較的早くベッドに潜り込んだ。エントロピーと対称性の問題もベッドの中で考えていたが、具体的な進展はなかった。僕が帰国する直前に、横倉さんの部屋で研究の着手点について議論した。例えば、「ゆらぎの定理のような対称性は関係しないのか?準静的極限での断熱定理がその対称性の結果として形式化されているのではないか?」と言いながら、黒板に関係する式を書いた。しかし、どうも感触がよくない。そもそも僕はネーターの定理にご無沙汰しすぎていたので、まずはしっかり復習しないといけない気がした。「帰りの飛行機でネーターの定理の復習するよ。」と言ってバンガロールを離れた。

マクロな熱力学エントロピーをミクロな力学の言葉で表すのは「ボルツマン公式」として知られている。もし、熱力学エントロピーを力学の対称性から導出できたなら、ミクロとマクロをつなぐ新しい視点になるかもしれない。そういう学問的位置づけなど、当初は、全く考えなかった。単純に「エントロピーと対称性のつながり」という考えに惹かれただけだった。

2. 基礎の確認

明示的に議論するため、箱に入っている N 個の粒子を考えよう。世界は外部から孤立しており、粒子の運動はハミルトンの運動方程式に従うとする。$3N$ 個の位置座標の組 q, 運動量座標の組 p に対して、$\Gamma = (q, p)$ が相空間の座標である。ハミルトニアンを $H(\Gamma, V)$ と記す。ここで、V はピストンの位置に対応する体積*4) である。ピストンの操作は V の時間依存性によって表現され、$\hat{V} \equiv (V(t))_{t=t_i}^{t_f}$ と書く。このときの運動方程式の解を $\Gamma_*(t)$ と書くと、この解に沿ったエネルギーの時間変化 $E_*(t) = H(\Gamma_*(t), V(t))$ が決まる。ところで、エネルギーの値 E と体積 V の値を指定すれば、エネルギー面 $\{\Gamma | H(\Gamma, V) = E\}$ で囲まれる領域の相空間体積 $\Omega(E, V)$ が決まる。時刻 t に対して、相空間の点 $\Gamma_*(t)$ が含まれるエネルギー面によって囲まれる相空間体積を $\Omega_*(t) = \Omega(E_*(t), V(t))$ と書く。関係するそれぞれのエネルギー面において、パラメータ変化がないときの力学系がエルゴード的*5) だとする。

このとき、「ゆっくりさ」を特徴づける小さなパラメータ $0 < \epsilon \ll 1$ を導入し、ゆっくりした操作を $V(t) = \bar{V}(\epsilon t)$, $t_i = \tau_i/\epsilon$, $t_f = \tau_f/\epsilon$ で定義する。ここで、$\bar{V}$ という関数形、および、τ_f, τ_i は ϵ に依存しないとする。十分に小さな ϵ を選ぶことにより、どんなゆっくりした操作も表現できる。従って、$\epsilon \to 0$ が熱力学における準静的操作に対応する。

さて、これらの設定のもとで次の定理が証明されている[3, 4]。

エルゴード断熱定理

準静的操作 $\epsilon \to 0$ に対して

$$|\Omega_*(t_f) - \Omega_*(t_i)| = O(\epsilon) \tag{1}$$

が成り立つ。

熱力学では、断熱準静的過程で一定となる示量変数としてエントロピーが一意的に特徴づけられる[5]。従って、断熱定理を踏まえると、熱力学エントロピーを

$$S(E, V) \equiv k_{\mathrm{B}} \log \frac{\Omega(E, V)}{N!} \tag{2}$$

と定義するのが妥当であることが分かる。k_{B} はボ

*4)　壁やピストンと粒子の相互作用は粒子に対する１体ポテンシャルによって表現される。そのポテンシャルにピストンの位置が関わっている。

*5)　時間発展で不変な領域はエネルギー面全体か、測度がゼロかのどちらかである

ルツマン定数で、熱力学基本関係式を介して定義される温度が標準的な温度と一致するように導入される。$N!$ は $S(E,V)$ が示量性を満たすように導入される。(2) 式がボルツマン公式である。

歴史的には、(1) 式は、熱力学エントロピーとミクロな力学の対応が議論されていた 1910 年頃に現象論的に導出された。(2) 式が熱力学基本関係式を満たすことがその核心なので、現在なら、統計力学を学んだ学部生でも議論できる。ただし、これを数学的に示す[3,4] のは簡単でなく、そこで必要とされる数学の知識は僕のレベルを超えている。それでも、７月中に、その証明の流れは追うことができた。

ネーターの定理は、標準的には、ラグラジアン $L(q,\dot{q},V)$ を使った形式で定式化する。操作 $\hat{V}$ に対して、軌道 $\hat{q}=(q(t))_{t=t_i}^{t_f}$ に対する作用を

$$\mathcal{I}(\hat{q},\hat{V})\equiv\int_{t_i}^{t_f}dtL(q(t),\dot{q}(t),V(t)) \qquad (3)$$

で定義する。この系に対して、何らかの無限小変換 G を定義する。無限小変換なので変化量には非常に小さい量をあらわすパラメータ η が掛けられており、全ての計算は η の１次までしか考えない。無限小変換 G を定義すると作用の変化は決まる。これを $\delta_G\mathcal{I}$ と書く。このとき、次の定理*6) を示すことができる。

一般化されたネーターの定理

$\psi(q,\dot{q},V)$ という関数があって、

$$\delta_G\mathcal{I}=\eta\int_{t_i}^{t_f}dt\frac{d\psi(q(t),\dot{q}(t),V(t))}{dt} \qquad (4)$$

を満たす（これを「対称性の条件」と呼ぶ）ならば、運動方程式の解に沿って時間変化しない量（保存量）$\mathcal{N}$ が存在する。$\mathcal{N}$ をネーター不変量と呼ぶ。

この定理は直接計算で示せるものの、結構泥臭い。工夫することで簡潔な計算になるが、勿論、どの計算方法でやっても最後の式は一致するはずである。ノートを横倉さんと交換しながら次第に計算に慣れてきた。また、標準的な教科書にあるのは $\psi=0$ の場合、あるいは、ψ が $\dot{q}$ に依存しない場合なので、(4) 式を対称性の条件とみなしていいかどうか７月の時点でははっきりしていなかった。対称性の深い理解は後回しにして、「一般化されたネーターの定理」そのものは正しいので先に進むことにした。

*6) これは Bessel-Hagen による１９２１年の論文で示された。その論文で「著者は１９１８年のネーターの定理の一般化をネーターから学んだ」 と記している。また、「一般化されたネーターの定理」の 数学的な議論は、ずっと後になってから出版された[6,7]。

3. 問題の設定

基礎的事項の確認を終えたので、いよいよ本丸である。実際の研究では、明示的な問題を解けばよい、という段階になると比較的楽に進む場合もある。今回の場合、次の問題を考えることになった。

問題

1. 準静的操作される系に対して、対称性の条件を満たすような無限小変換 G を求めよ。
2. そのときのネーター不変量が、断熱定理によって保存するエントロピーと一致することを確認せよ。

問題文は簡単だが、即答できない。特に、変換 G を探さないといけないが、満たすべき条件から変換を決めるのは難しいように見えた。そこで、変換 G を決め打ちして、対称性の条件が満たされることを確認することにした。

予想はあった。操作をしないとき、すなわち、$V(t)$ が t に依存しない場合、エネルギーが保存する。このときの対称性は時間の一様な並進 $t\to t+\eta$ に対する不変性である。ところで、エネルギー E が保存するならその任意関数 $f(E)$ も保存する。そこで、ネーター不変量として $f(E)$ を導く変換の形を求めると、時間の非一様並進

$$t\to t+\eta\left.\frac{df}{dE}\right|_{E=E(q,\dot{q},V)} \qquad (5)$$

が対応することが分かった。実際、このとき対称性の条件を満し、ネーター不変量は $f(E)$ になる。

そこで、$f(E)$ としてエントロピーに比例する形 $cS(E,V)$ を選ぶと、(5) は

$$t \to t + \eta c\beta|_{E=E(q,\dot{q},V)} \tag{6}$$

となる。ここで $\beta \equiv \partial S/\partial E$ は逆温度 $(k_{\rm B}T)^{-1}$ である。c は作用の次元を持った定数である。

以上を踏まえて、次のように考えた。まず、時間に関する非一様並進

$$t \to t + \eta\xi(q,\dot{q},V) \tag{7}$$

を仮定する。ξ の関数形は決まっていない。このとき「対称性の条件を満たす ψ と ξ を見出す。」という問を解けばよい。答えは、きっと $\xi = c\beta$ だろう。後は技術的な問題だと楽観していた。

4. 山場越え

しかし、簡単な話ではなかった。操作を考えるときには、対称性の条件を満たす ξ が見つからないのだ。勘違いして「できた！」と思ったときもあったが、一晩寝れば単純な勇み足に気付いた。エントロピーの存在を積分可能条件から定式化するカラテオドリ理論との関係や上で紹介した操作がないときの議論との整合性との関係など、理解を深める題材を検討して、うまくいかないことを納得する、ということを繰り返した。その頃のメールのやりとりやノートを読み返すと、膨大な試行錯誤をしていることに感心する。研究者のタイプには色々あるが、僕は、徹底して泥臭く試行錯誤の回数を重ねる。最小限の努力で最大限の結果を得れば格好いいが、そういう研究は僕には向いていない。しかし、残念ながら、夏休み前の結論として、上記の問で対称性の条件を満たす ξ はない、ということを認めざるを得ないところまで追い込まれた。

８月１８日の夜、徳島から京都に戻るバスの中で、目をつぶって打開策を考えた。「半分やらせ」かもしれないが、あるクラスに制限された軌道に対してのみ変換を考えると対称性の条件を満たすことができそうである。他に手がないので、ここは決断して先にすすむべきだ。帰宅して、すぐにメールを書いた。

8 月 18 日 22:16 のメール

> 操作は準静的極限を定義できます。その下での「解」も任意性がありませんが、対称性を議論するには、解に限定しては意味ありません。そこで、与えられた準静的操作のもとで、（解に限定されずに）準静的な軌道という対象を定義する必要があります。（中略）それができたつもりでノートを書こうとしています。そのとき、対称性の存在がカラテオドリと同じになり、そこから断熱不変量の存在が分かります。

その後、ノートを書いて横倉さんに送った。大きな方向性へ賛意と論旨が甘いところがあるという指摘が帰ってきた。議論を重ね、次のような結果を得た。まず、「熱力学における準静的過程と整合した軌道」という考えが数学的に表現された。そして、それらの軌道に対して対称性の条件を満たすのは、(7) 式において

$$\xi = c\beta\mathcal{F}(S) \tag{8}$$

に限られることが分かった。ここで、$\mathcal{F}(S)$ はエントロピー S の任意関数である。このときのネーター不変量は

$$\mathcal{N} = \int^{S} dS'\mathcal{F}(S') \tag{9}$$

である。

5. 論文草稿作成

８月下旬、「対称性の条件を明晰にする。」という先延ばしにしておいた問題を考え始めた。解析力学の発展を勉強しつつ、今の文脈で適切な理解を考えていた。論文[7] を読んでいたが、完全には分からなかった。ただ、考えている対称性の条件の下では、変換により解が解に移される、という性質があることは分かった。横倉さんの解説ノートなどにより、文献に丸投げすることなく最低限

の理解には到達した。

この段階で論文草稿を書くことにした。下り坂を一気に駆け下る気分だった。僕は研究を山登りに例えることが多い。最初は登り口を探す。こっちはどうだ、いや、そっちはどうだ、とか。そもそも麓にいたまま登り口が見つからないこともある。一旦登り始めても、道が消えて迷子になったり、滑落したりする。そうこうするうちに視界が開け、ぐいぐいと登れるようになる。ただ、山頂がゴールではない。そこから下るのだ。これまでの風景とは違うものを見ながら、一気に駆け下る。麓に戻ったところで論文を投稿する。

論文草稿を書きながら、残してきた問いを完全に詰める。例えば、不変量がある変換を探す、という問題設定をしたために、見つかった変換は一意には定まっていない。$\mathcal{N}$ が不変量なら $\mathcal{N}^2$ も不変量だからである。この不定性が (8) 式の $\mathcal{F}(S)$ の任意性に対応している。一意に絞るためには、不変量に新たな性質を要請する必要がある。これに悩むことはなかった。マクロ系を対象にして「示量的ネーター不変量」を問題にすればよい。２、３日混乱したが、結局、$\mathcal{N}$ が示量的ならば $\mathcal{F}(S)$ は定数 c になることが分かった。つまり、

$$\xi = c\beta \tag{10}$$

であり、(6) 式として予想した通りになった。

6. まさかの展開

９月末までに arXiv に公開することを目指して、論文草稿のバージョンを順調に上げていた。９月１６日に横倉さんからメールが届いた。「非一様な時間並進にプランク定数 $\hbar$ が必要なのでは？」と書かれていた。定数 C が作用の次元を持っているので、次元を合わすには $\hbar$ をつけるのは自然に思える。僕は次のように返信した。

9 月 16 日 16:32 のメール

> $\hbar$ はつけようかどうか迷いました。次元を合わすには必要なのですが、プランク定数でなくてもいいしなぁ、、、とためらっています。

この時点で、僕は、重大な問題とは思っていなかった。論文にはプランク定数を書かないつもりでいた。あくまで古典力学と古典統計力学と熱力学の解析なのでプランク定数が関わる理由がないからである。それから二日たった９月１８日に横倉さんから「熱力学の示強性と使うことでプランク定数がでてくるのではないか。」というメールが届いた。その論旨は直ちに理解したが、証明にはなっていないように思った。そこで次のようなメールを書いた。

9 月 18 日 8:30 のメール

> 今もっているだけの条件だと、Lagragian 毎に異なった値をとってもよい、というのが崩せていないように思うのですが。
>
> 普遍定数を選んでよい、というのは全く正しいのですが、普遍定数でないといけない（それが何かはこの古典力学の解析では分からないが）というのが正しいなら、それを明示的に示すのがポイントかな、と思っています。

これだけだと伝わらないと思った。横倉さんとは既に膨大な数のメールの交換をしていたので、横倉さんの次の反応が見えるのである。こういうふわっとした説明では納得してくれないだろうな、と想像がついた。そこで、もっと丁寧に書くことにした。そのメールを書き始めたときの心情は今でもはっきり覚えている。普遍定数があらわれることはない、ということを完全にしておこう、ということだった。論文草稿のバージョンアップでしないといけないことはまだたくさん残っており、その作業に集中するためにも、邪念はきっちり切っておく必要がある。そういう冷めた心持ちで追加メールを書き始めた。

9 月 18 日 9:00 のメール

式で書くと、以下のような感じです。ラグラジアンごとに定数がきまるので、これを $c(L)$ と書く。これは相空間の状態には依存せず、スケール変換に関して値をかえない定数。(中略)

示強性はダメです。相加性は複合系の議論ができるのでより強い性質です。だから、論文草稿の順序で (23)*[a] までいってから相加性で絞ったのです。

あ、(24) のところで相加性の条件を丁寧に書くと、そこから普遍性がでてくるかもしれない。

と、メールの返信中に方針がみえたかも。

*a) この式番号はメールのまま書いている。その時点での論文草稿での式番号である。

メールを書いている途中で、メールの趣旨がひっくり返った。横倉さんの案がうまくいかないことを説明しようと書き始めたメールで、横倉さんの案がうまくいくかもしれない考えが始まってしまったのだ。こういうのは単独研究では絶対に起こらない。共同研究の醍醐味である。そして、ノートを書いた。

9 月 19 日 0:11 のメール

$\xi = a\beta\hbar$, a は無次元定数, という主張を説明したノートを送ります。

正しいなら、かなり驚きです。

力学と熱力学と統計力学だけから、作用の次元をもった普遍的な定数が存在することが帰結されるのですから。

横倉さんからはすぐに返事がきた。二人が完全に納得するまでそこから２日くらいかかった。（この時点では熱力学第３法則を使った証明になっていた。）そして、この研究でもっとも衝撃を受ける結果となった。そもそもこの課題は「熱力学エントロピーを対称性から特徴づけること」を目的にしていた。その目的は８月までに達成していた。論文公開に向けて細部をつめている段階で、全く想像していなかった展開になった。

7. 論文の完成

予定通り、９月末に論文[1)]を公開した。それを機に多くの方からコメントをいただいた。特に、古い文献についての情報を教えてもらったのは勉強になった。また、横倉さんと僕は色々なところでセミナーをして、その準備や議論で理解が深まっていった。例えば、２０１６年1月に、セミナー準備中の横倉さんからメールが届き、「変換を絞る議論に第３法則は使わなくていい」というノートが届いた。公開されていた論文草稿の最後のステップが冗長であり、そこをすっきりさせると第３法則と関係なく普遍定数がでてくることが分かったのだ。

そして、論文は２０１６年４月８日号の Phys. Rev. Lett に掲載された。嬉しいことに Editors' suggestion にも選ばれた。その論文のアブストラクトを書いておく。

We study a classical many-particle system with an external control represented by a time-dependent extensive parameter in a Lagrangian. We show that thermodynamic entropy of the system is uniquely characterized as the Noether invariant associated with a symmetry for an infinitesimal non-uniform time translation $t \to t + \eta\hbar\beta$, where η is a small parameter, $\hbar$ is the Planck constant, β is the inverse temperature that depends on the energy and control parameter, and trajectories in the phase space are restricted to those consistent with quasi-static processes in thermodynamics.

この中で、"non-uniform time translation $t \to t + \eta\hbar\beta$" が、僕たちが見いだした「時間目盛りを非一様にする変換」である。例えば、断熱環境でピストンをゆっくり押すと温度が上昇する。それに対応してずらす時間目盛りを変える。この非一

様な時間並進に対する対称性のネーター不変量として熱力学エントロピーが本質的に一意に特徴づけられる。そして、その変換に明示的に書かれているプランク定数は、論文公開２週間前になって著者たち自身を驚ろかせたのだった。さらに、最後の “restricted to those consistent with quasi-static processes in thermodynamics” が８月中旬の山場のアイデアである。完成した論文では、それらの背後にある膨大な試行錯誤や喜怒哀楽は書かれない。むしろ、学術的な結果は、そういうのを完全に排して報告されるべきである。それでも、これまで書いてきたように、論文のひとつの言葉に著者たちの様々な想いが結実していることもあるのだ。

8. 未来へ

ミクロな力学世界の対称性によって熱力学エントロピーを特徴づける、という研究は、この記事の冒頭の会話から唐突に始まった。そこには学問的な狙いや深い動機はなかった。しかしながら、ミクロな力学とマクロな熱力学をダイナミクスを通して結びつけるときに非一様な時間目盛りが関わるのは何か深い理由があるに違いない。特に、その非一様な時間目盛りに「作用の次元をもった普遍定数」があらわれたのは、ミクロとマクロのつながりに量子力学が本質的に関わっていることを示唆しているのかもしれない。

それを明らかにする第一歩として、量子多体系に対してこの対称性が理解できるのかどうか、あるいは、そもそも量子ダイナミクスと熱力学過程をつなぐような理論は可能かどうかを考えた。その議論の途中で、杉浦さん*7)が共同研究者に加わった。杉浦さんは、僕たちの研究に興味を持って、「熱力学の解析力学」が僕たちの結果と関係することを明らかにしていた。ちょうどそのとき、熱力学状態空間における量子力学の表現を模索しており、まさにその「熱力学の解析力学」との関係を明らかにすることが問題だと分かったのである。この問題に対する結果は、現在、論文[8]として公開されている。

さらに、ブラックホールエントロピーを「何かの微視的状態数」にもとづいて議論する理論は色々あるらしいが、対称性を鍵として、ブラックホールエントロピーと熱力学エントロピーの新しいつながりが分かれば楽しい。

最後に、マクロなダイナミクスとミクロなダイナミクスの関係を議論する以上、熱力学第２法則との関係は当然気になる。「対称性の破れとして捉えられるのではないか」と素朴には期待するけれど、具体的にどのようにして結びつけるのか、今のところはっきりしない。

「時間の対称性がつなぐミクロとマクロ」という考え方は確かに面白いと思う。しかしながら、そういう考え方もできるだけで、自然法則の理解にとって本質的ではないかもしれない。あるいは、逆に、僕たちが全く知らない何かに大きく成長する種になっているかもしれない。もうしばらくはワクワクしながら検討を続けたい。

*7) 杉浦祥さんは、２０１５年３月に、量子多体系の研究で学位をとられ、現在、物性研究所で学振特別研究員をしている。

参考文献

1) S. Sasa and Y. Yokokura, Thermodynamic entropy as a Noether invariant, Phys. Rev. Lett. **116**, 140601 (2016);arXiv:1509.08943
2) R. M. Wald, Black hole entropy is the Noether charge, Phys. Rev. D. **48** R3427-R3451 (1993).
3) T. Kasuga, On the adiabatic theorem for the Hamiltonian System of differential equations in the classical mechanics I-III, Proceedings of the Japan Academy **37**, 366-382 (1961)
4) P. Lochak and C. Meunier, *Multiphase averaging for classical systems*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, (1988).
5) 佐々真一、熱力学入門、(共立出版).
6) A. Trautman, Noether’s equations and conservation laws, Comm. Math. Phys. **6**, 248 (1967).
7) W. Sarlet and F. Cantrijn, Generalizations of Noether’s theorem in classical mechanics, SIAM Rev. **23**, 467-494 (1981).
8) S. Sasa, S. Sugiura, and Y. Yokokura, Thermal pure state path integral and emergent symmetery, arXiv:1611.07268

（ささ・しんいち，京都大学大学院理学研究科）