熱力学とランダムネス

2002 年 02 月 04 日

佐々真一[1]

1　はじめに

熱力学法則と熱力学系の構成要素に対する力学法則の関係を考察するとき、それぞれの体系における言葉や概念の対応を理解することからはじめなければならない。熱力学では、小数個の熱力学変数の組の座標値であわらされる平衡状態が基本的な対象である。それでは、平衡状態は力学系のどのようなもの対応するのだろうか。

おそらく、平衡状態を力学系の確率測度 (平衡測度) ととらえる見方が主流であろう。たしかに、熱力学的性質は力学系の確率測度を前提にすることによって計算できる。しかし、例えば、「箱の中の粒子をかきまぜて非平衡状態にしたあと、十分長い時間がたつと平衡状態に緩和する。」という典型的な現象の記述における「非平衡状態」とか「平衡状態」は何を指しているのだろうか。かりに、そこでの「平衡状態」という言葉が、力学系の確率測度 (平衡測度) とするならば、「非平衡状態」とは何をさすのだろう。

ひとつの考え方は、力学系上の確率測度に対して平衡状態とか非平衡状態という言葉を使い、粒子をかき混ぜたあとの状態変化を確率測度の時間変化で記述することである。ところが、箱の中の粒子の運動を想像すればわかるように、古典力学系では、平衡状態への緩和現象は一本の力学系の軌道として表現される。つまり、「非平衡状態」や「平衡状態」という言葉は、相空間の点として表現されるミクロ状態の属性として特徴づけられるべきである。 また、力学系として量子力学を考えるなら、純粋状態の属性として平衡と非平衡の区別がなされるべきである。

このノートでは、相空間の点などのミクロ状態に対する平衡状態と非平衡状態の区別に関して考察[2]する。

1.1　素朴なアイデア

平衡状態とは、断熱環境にある系が何もされないまま十分時間がたったあとで到達する状態である。力学系でも同様に考えたいのだが、ミクロ状態は時間発展しているので、「十分時間がたったあとで到達する状態」という表現にならないことはすぐにわかる。むしろ、平衡状態に対応するミクロ状態の特徴づけを先におこなって、断熱環境にある系が何もされないまま十分時間がたったあとでは、その状態にある時間が圧倒的に多いということ数学的に示すことを考えるべきであろう。

そういう視点から熱力学にもどると、圧力や温度などの「マクロな物理量」の存在を前提にして、それらが時間変化しない状態として平衡状態を定義することが考えられる。より正確には、全ての「マクロな物理量」が熱力学極限において時間変化しない状態を平衡状態だとする。具体的なモデルにおいてマクロな物理量を指定したあとでは、このような議論を数理的に行う

[1]東大総合文化研究科、sasa@jiro.c.u-tokyo.ac.jp, http://dbs.c.u-tokyo.ac.jp/~sasa/sasa/

[2]2001 年度冬学期に行った大学院講義最終回の講義ノートでもある。このような考察を行っている文献を筆者は知らないので、いつか自分自身で考えを整理したかった。講義はその絶好の機会だった。

ことは可能であるが、一般的に考えるのは容易ではない。「マクロな物理量」とは何か、という問は自明なものではないし、より深刻には、平衡状態の特徴づけとしては弱すぎる。例えば、非平衡定常状態においてもマクロな物理量は時間変化しないのである。

そこで、もっと素朴に、平衡状態や非平衡状態に対応するミクロ状態を例示することを考えてみる。しばしの試行のあとで、次のようなことに気付く。

平衡状態に関する経験事実: 平衡状態に対応しないミクロ状態は簡単に例示できるが、平衡状態に対応するミクロ状態は例示できない。

平衡状態に対応するミクロ状態を例示できなくても、例えば、各粒子の位置が一様ランダムに散らばっていて、各粒子の速度がマクスエル分布からサンプルしたような状態は平衡状態に対応する、というのはもっともらしい。あるいは、統計力学を前提にして、**ミクロカノニカル分布やカノニカル分布からサンプルされた典型的な状態は平衡状態に対応する**、という表現に到達すると平衡状態に対応する力学状態の特徴づけができたかのように思える。

しかし、「典型的な状態」とは何か？ 各粒子の位置が一様ランダムに散らばった状態は典型的な状態のように思える。では、一様ランダムとは何か？ これらの問と上で掲げた「平衡状態に関する経験事実」を併せて考えると、これらすべてが**平衡状態とランダム列の類似性** を示唆しているように思える。

ランダムネスについては Appendix で説明しているが、次のことが感覚的にわかればよい。(i) ランダムでない列をつくるのは簡単であるが、与えられた列がランダムであるかどうかを見出すことはできない。(ii) ランダム列とは確率過程で生成された典型的な列である。「典型さ」はランダムネステストを介して定義される。(iii) ランダム列に対しては大数の法則などの統計的規則性が成立する。

「平衡状態に関する経験事実」はランダム列の性質そのものだし、マクロな物理量の存在は大数の法則と関係する。ランダムネスでは典型的な状態という概念化がおこなわれれているのも示唆的である。このように並べてみると、平衡状態に対応するミクロ状態をランダムネス視点から考察することが必要に思える。

このノートの構成は次のようになっている。２節で保存量のある可逆 CA に対して、平衡状態とランダムネスの関係を考察し、平衡状態に対応するミクロ状態の定義を与える。２節の結果を古典力学系に拡張することを３節で試みる。４節では今後の問題を整理する。ランダムネスの数理に関係したことは Appendix にまとめる。

2　保存量のある可逆 CA

2.1　モデル

古典力学系や量子力学系を対象にしてランダムネスと平衡状態の関係を考察するのは技術的に難しい。問題の核心は、決定論的力学系の再帰性と可逆性がマクロレベルの平衡状態の存在およびそこへの緩和とどのように整合しているのか、という点にある。この問題を考察できる最小のモデルは可逆 CA であろう。とくに、武末さんによって研究された保存量の存在する可逆 CA(26R)[3]は、保存量を介して熱力学との対応があることが数値的に示されている。

[3] S. Takesue, PRL **59**, 2499 (1987); **60**, 252, (1990).

1次元可逆CAの状態変数は、i サイト上で $\{0,1\}$ に値をとる σ_i と $\hat{\sigma}_i$ である。これらの時間発展則を

$$\sigma_i^{t+1} = f(\sigma_{i-1}^t, \sigma_i^t, \sigma_{i+1}^t) \text{ xor } \hat{\sigma}_i^t \tag{1}$$

$$\hat{\sigma}_i^{t+1} = \sigma_i^t \tag{2}$$

と定義する。ここで、xor は、$a, b \in \{0,1\}$ に対して $a + b - 2ab$ を与える「exclusive or 演算」である。$\{0,1\}^3$ から $\{0,1\}$ への関数 f が CA の時間発展ルールを決める。このノートで問題にする 26R というルール[4]は

$$f(a,b,c) = a + c - bc - 2ac + abc \bmod 2 \tag{3}$$

である。

$\mathbf{Z}$ 上で定義された CA のミクロ状態は、σ_i と $\hat{\sigma}_i$ の値を並列して書くことによって記述される。このノートでは、$z_i = (\sigma_i, \hat{\sigma}_i)$ とし両側無限列

$$\omega = \cdots z_{-1} z_0 z_1 \cdots \tag{4}$$

で CA のミクロ状態をあらわす。CA のミクロ状態全体の集合を $S = \{0,1\}^{\mathbf{Z}} \times \{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ とかく。

$k, m \in \mathbf{N}$ に対して、$-k$ サイトから m サイトの領域に制限した状態を

$$\omega_{-k:m} = z_{-k} z_{-k+1} \cdots z_m$$

とかく。原点を含む有限領域に制限した状態全体の集合を

$$B^* = \{\omega_{-k:m} | k, m \in \mathbf{N}\} \tag{5}$$

とかく。

2.2 統計力学

可逆 CA(26R) には保存量[5]

$$\Phi_N = \sum_{i=-N}^{N-1} h(z_i, z_{i+1}) \tag{6}$$

がある。ここで、

$$h(z_i, z_{i+1}) = (\sigma_i - \hat{\sigma}_{i+1})^2 + (\sigma_{i+1} - \hat{\sigma}_i)^2 \tag{7}$$

である。この保存量をつかって、$-N$ サイトから N サイトまでの有限状態に対する温度 β のカノニカル分布を

$$P_{\beta,N}(\omega_{-N:N}) = \exp\left(-\beta\left[\sum_{i=-N}^{N-1} h(z_i, z_{i+1}) - F_{\beta,N}\right]\right) \tag{8}$$

[4] $\sum_{a,b,c} 2^{4a+2b+c} f(a,b,c) = 26$ である。Wolfram による CA ルールのコード化にしたがったルールの名前である。

[5] この形の量が保存されるのは、$-N$ サイトから N サイトまでの有限系で $z_N = z_{-N}$ という周期境界条件を課したときである。

と定義する。ここで、

$$-\beta F_{\beta,N} = \log \sum_{z_{-N},\cdots,z_N} \exp\left(-\beta \sum_{i=-N}^{N-1} h(z_i, z_{i+1})\right) \tag{9}$$

である。N が十分大きいとき、ある β があってこの分布関数による統計力学が妥当であろう、というのが武末論文の数値実験による予想である。そこで、$\{0,1\}^\infty$ 上で定義された測度 μ_c^β を、N を無限大にする極限で

$$-\log \mu_c^\beta(\omega_{-N:N}) = \beta \left[\sum_{i=-N}^{N-1} h(z_i, z_{i+1}) - F_{\beta,N}\right] + o(N) \tag{10}$$

が成り立つように定義する。一般の (k,n) に対する $\mu_c^\beta(\omega_{-k:n})$ は、Appendix A の (24) から決められる。$\{0,1\}^\infty$ 上で定義された測度 μ_c^β がこの CA の統計力学を与えるものと仮定する。

十分大きな N に対する熱力学エントロピー $S_{\beta,N}$ を

$$S_{\beta,N} = \beta \left[\left\langle \sum_{i=-N}^{N-1} h(z_i, z_{i+1}) \right\rangle_{\beta,N} - F_{\beta,N}\right] \tag{11}$$

と定義する。$P_{\beta,N}$ による平均を $\langle\cdot\rangle_{\beta,N}$ とあらわした。

このモデルが力学系としてどの程度理解されているのか筆者は知らない。もし有限系なら、時間周期解しかないので、不変測度はそれらの周期解上に δ 的にのる。周期解の周期やら種類が系の大きさに対して数論的に複雑になっているだろう。無限系の場合、空間並進対称な不変測度は[6]、与えられた保存量密度 (or 温度) の値に対して一意的に存在するだろうか。

2.3 ランダムネスの視点から

平衡状態に対応するミクロ状態をランダムネスとの関連で議論したい。ランダムネスに関する数理は Apendix B, C にまとめている。Martin-Löf によるランダムネスの定義は、測度で相対化したもので、ある測度でみたときにその数列が典型的なものをランダムだとする。そして典型的であるかどうかをテストによって決める。

統計力学を前提にして、平衡状態に対応するミクロ状態は測度 μ_c^β に関してランダムなものである、と考えるのはもっともらしく思える。この考えにしたがうと、1.1 節で述べた「平衡状態に関する経験事実」は自然に了解できるし、ω は大数の法則など確率 1 で成立する effective な統計法則を全てみたすので、ミクロ状態 ω でマクロ変数の値をみれば平衡値と一致する。

そういう意味でもっともらしい考えではあるが、条件が厳しすぎる可能性がある。例えば、ランダムなミクロ状態では、確率 1 で成立する the law of iterated logarithm (cf. Fellar, p.204) を満たす。しかし、あるミクロ状態がこの法則を満たさないとしても、そこから実験的に検証可能な何らかの非平衡性につながるとは考えにくい。つまり、universal なランダムネステストに合格するミクロ状態を平衡状態に対応すると考えるのは強すぎる。

そこで、ランダムなミクロ状態がもつ性質のうち「物理的」に重要なものを抽出し、平衡状態に対応するミクロ状態の特徴づけをしたい。次の定理は示唆的である。

[6] CA184 における不変測度とそこへの収束については、V. Belitsky and P. A. Ferrari, math.PR/9811103 で議論されている

定理 $\omega \in S$ が μ_{c}^{β} に関してランダムなミクロ状態ならば、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} K(\omega_{-N:N}) \log 2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} S_{\beta,N} \tag{12}$$

が成り立つ。ここで、K は Kolmogorov complexity である (cf. Appendix C)。

証明 $\omega \in S$ が μ_{c}^{β} に関してランダムなので、Appendix D の (70) 式で表現される定理を参照すると、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} K(\omega_{-N:N}) = -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log_2 \mu_{\mathrm{c}}^{\beta}(\omega_{-N:N}) \tag{13}$$

が成り立つ。(10) より、

$$-\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \mu_{\mathrm{c}}^{\beta}(\omega_{-N:N}) = \lim_{N\to\infty} \frac{\beta}{N} \left[\sum_{i=-N}^{N-1} h(z_i, z_{i+1}) - F_{\beta,N} \right] \tag{14}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} S(\beta, N) \tag{15}$$

を得る。最後の等式の成立は、ω が μ_{c}^{β} に関してランダムなことより (確率 1 で成立する) 大数の法則をみたすことによる。(13), (15) より (12) を得る。 (証明おわり)

(12) で主張される定理は、力学系における軌道の複雑さと測度論的エントロピーの関係を示した Brundno の定理 (cf. Appendix E) を思い出させる[7]。実際、$\{0,1\}^{\infty}$ 上のシフト写像を定義し、μ_{c}^{β} がその写像に関するエルゴード的な測度ならば、Brundno の定理により、μ_{c}^{β} に関してほとんど全ての $\omega \in \{0,1\}^{\infty}$ について、(12) が成立する。したがって ω がランダムならば、(12) を満たす。つまり、(12) の本質は Brundo の定理で尽きている。

ミクロな状態は確率 1 でランダムなので、(12) は確率 1 で成り立つ。これは Brundno の定理に他ならないが、その物理的な意味は重要である。問題にしている CA モデルでは、保存量密度の関数としてのエントロピーによって、熱力学的性質を特徴づけることができるのだから、熱力学と力学の対応を明らかにするには、ミクロ状態に対して定義された「量」で、確率 1 で熱力学エントロピーの値と一致するもの何か？という問いに対する答えをまず見出せれば、平衡状態に対応するミクロ状態をその確率 1 の集合の要素だと考えればよいように思える。そして、(12) 式は、$K(\omega_{-N:N}) \log 2$ の示量部分が熱力学エントロピーと一致するという条件なので、$K(\omega_{-N:N}) \log 2$ をミクロ状態に対するエントロピーと解釈する[8]のは自然である。

以上の考察により、次の定義に到達する。

定義：$\omega \in S$ が (12) を満たすとき、それは逆温度 β の平衡状態に対応するミクロ状態である。

以上の議論では、CA の統計力学を前提にし、平衡状態に対応するミクロ状態の特徴づけに到達した。ところで、論旨を逆にすることにより、統計力学の基礎づけを問うことができる。CA の時間発展ルールと状態空間が最初にある。(12) の右辺をある定数とし、(12) が確率 1 で

[7]大野さんの指摘による。Lambalgen, J. Symbolic logic, **52**, 725 (1989) の定理 5.2 で (12) と本質的に等価なことが述べられており、そこでも Brundo の定理との関係も言及されていた。読んでいたはずだが、講義ノート初稿を書くときは失念していた。

[8]C.H. Bennet, Int. J. Theor. Phys. **21**, 905, (1982) でこの対応関係が言及されているが、平均値を介した対応である。また、W. H. Zurek, Phys. Rev. **A 40**, 4731, (1989) や Li-Vitány の最終章やそこで言及している Gacs のノート (web page から down load できる) においても関連した議論があるが、Brundno の定理への言及はない。

成り立つような不変測度を問う。状態空間が温度 β(か保存量密度) で特徴づけられるものに分解され、その上でのギブス測度が求める不変測度になる、という主張の証明はできないだろうか。数学的に簡単でないのは明らかであるが、もし問題としてきちんと定義できているなら、数学者が挑戦する価値があるように思える。

2.4 平衡状態への緩和

逆温度 β に対応する保存量をもつが、N 無限大の極限で

$$S_{\beta,N} - K(\omega^0_{-N:N}) \log 2 = O(N) \tag{16}$$

が成り立つような ω^0 をとる。定義により、このミクロ状態は非平衡状態である。例えば、ω^0 として次のような例を考えることができる。逆温度 β_1 の系の平衡状態に対するミクロ状態を $i < 0$ のサイトにおき、逆温度 β_2 の系の平衡状態に対するミクロ状態を $i > 0$ のサイトにおく。β_1, β_2 として特殊なものを選ばなければ、この状態を ω^0 とすることができる。

ミクロ状態 ω^0 を初期条件にとった可逆 CA(26R) の時間発展を考え、t ステップ後の状態を ω^t と書く。十分長時間後に平衡状態に緩和することを示したい。どういう表現がいいのかすぐにはわからないが、例えば、田崎さんの論文[9]の表現が参考になるかもしれない。問題の核心は、複雑さの時間変化 $K(\omega^t_{-N:N})$ にある。これが t に関して増加することを「うまく表現し」それを示せばよい。

K は計算可能ではないので、m ステップまでに停止する prefix-algorithm の中での最小長という条件をつけることによってえられる計算可能な関数 $k^{(m)}$ を考え、$m \to \infty$ という極限によって、K を扱うしかない。$m \to \infty$, $N \to \infty$, $t \to \infty$ という三つの極限が錯綜することによる技術的な困難もあるし、何よりも K に関する知見がなさすぎて、(いまのところは) どうにもならない。また、$m \to \infty$ が扱いにくい極限であるために、K そのものが数値計算で簡単に扱えるようなものでもない。

考えれるひとつの道は、示量性を積極的に使うことである。我々が欲しいのは、$K(\omega_{-N:N})$ の示量的な部分だけである。この部分だけをうまく取り出すことは考えられないのだろうか[10]。

3 古典力学系

前節で展開した可逆 CA の議論を古典力学や量子力学に適用したい。やみくもに計算論的な考察に入る前に、前節の平衡状態に関する定義が古典力学や量子力学ではどのような形になるのから考える。このノートでは古典力学に限定する。より具体的に、1 次元 Fermi-Pasta-Ulam 非線形振動子モデルで念頭[11]において議論をすすめる。前節の定義では、ミクロ状態に対して定義された「量」が確率 1 で熱力学エントロピーの値と一致する、という点が重要であり、CA の場合にはその「量」が Kolmogorov complexity だった。

ところで、確率 1 で一致するという表現は、N を無限大にする極限で意味をもつ。CA では、この極限で可算無限濃度 $\aleph_0$ の集合 B^* から非可算無限濃度 $\aleph_1$ の集合 S へと移行するが、このような濃度変化に特別な物理的意味があるような気がしない。むしろ、熱力学極限の特殊な例

[9] H. Tasaki, PRL 98 1373 (1998)

[10] KS エントロピーを数値計算できる、という事実は重要だと思う。

[11] 非線形性が十分大きいときノーマルな熱力学系であることが数値計算ではわかっている。気体系の場合もほぼ同様にできるが、技術的に少し面倒なことが増える。

だと考えるべきだ。そうすると、確率 1 で熱力学エントロピーの値と一致するミクロ状態の関数が Kolmogorov complexity であるのも特殊なような気がしてくる。そこで、確率 1 で熱力学エントロピーの値と一致するミクロ状態の関数がどういうものであって欲しいか、という点から考えていく。

まず、平衡状態に対応するミクロ状態とは何か、と問いたいのだから、熱力学に関する特徴づけは終っていると考える。つまり、熱力学の平衡状態を特徴づける示量変数の組 $(U, X_1, \cdots X_m)$ があることは前提にする。U は内部エネルギー、X_i は仕事変数である。物質の種類と物質量をきめれば、(U, X_i) の関数として一意的にきまる熱力学エントロピー S がある。この熱力学系の構成要素の運動を記述する力学系の状態空間を Γ^∞ とかく。熱力学極限を考えたいので、$\Gamma^\infty = \mathbf{R}^\mathbf{N}$ である。また、任意の有限粒子数のミクロ状態のあつまりを Γ^* と書く。

$\omega \in \Gamma^\infty$ を

$$\omega = (\cdots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots) \tag{17}$$

とあらわす。ω_i は i 番目[12]の粒子の運動量と座標の組 ($\mathbf{R}^2$ の元) である。$\omega_{-k:n}$ は $n+k+1$ 粒子系の相空間の座標である。

この系の単位粒子数あたりの熱力学エントロピー $\bar{s}$ がわかっているとする。考えたい「量」K_Γ は、Γ^* から実数への関数で、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} K_\Gamma(\omega_{-N:N}) = \bar{s} \tag{18}$$

が確率 1 で成り立つものであり、(直感でわかる) 非平衡状態は確率 1 からはずれる状態になっていて欲しい。ただし、ここでの確率は、Γ^∞ 上で定義される平衡測度[13]で規定される。

第一の問題は、このような量 K_Γ が存在するかどうかである。$\{0,1\}^*$ 上で定義される Kolmogorov complexity を Γ^* 上の関数として拡張したものではあるが、最小プログラム長のようなものではない。第 2 に、自然な K_Γ が構成できるならば、K_Γ の存在を前提にして、逆の問題「(18) が確率 1 で成り立つような平衡測度は何か？ 」を考えたい。もし、K_Γ が測度から完全に自由に構成できるならば、これは等重率の原理の理解への挑戦になるし、そこまで野心的でなくても、なんらかの前提で構成された K_Γ から、その前提にもとづいて平衡測度を決めることができる。これは、ボルツマンが orthodics とよんだ測度の特徴づけ[14]を数理的に考えるアプローチを提供することになっている。

第一の問題では、Brundno の定理の成立が鍵である。Appendix E の証明をみると、Appendix C の補題しか使っていない。おそらく、次の補題によって K_Γ を定義すれば、(18) が確率 1 で成り立つだろう。

補題 ?Γ^* から実数への semi-computable な関数 f が、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int d\omega_{-k:n} \exp(-f(\omega_{-k:n})) \leq 1 \tag{19}$$

を満たすなら、正の定数 c が存在し、全ての $x \in \Gamma^*$ に対して

$$K_\Gamma(x) \leq f(x) + c \tag{20}$$

が成り立つような $K_\Gamma(x)$ が存在する。

[12] i は負にもなる。FPU 鎖が両側無限にひろがっていることを想定している。
[13] 数学的にはかなりおそろしいものである。Gibbs 測度をまじめに勉強しないといけない。
[14] cf. G. Gallavotti, Statistical mechanics (Springer)

文献[15]によれば、Γ^* 上の computable な実数値関数の定義は確立しているらしい。その定義にもとづいて、Γ^* 上の semi-computable な実数値関数を定義することができる。(cf. Apendix F) 補題？の証明は２段階からなる。(i) Γ^* 上の semi-computable な実数値関数に universal element があること、を示し、(ii)Γ^∞ 上に universal semi-measure が存在することを示せばよい。より具体的には、Li-Vitány p.213 にある (i) に関する議論と Li-Vitány p.235 にある (ii) に関する議論を $\{0,1\}^*$ から Γ^* へ変更すればよい。しかし、この変更は重大であり、「部品」から再構成しないといけないようにみえる。むしろ BCSS[16]p.70- などの議論をみていると、彼らの理論が参考になるかもしれない。あるいは、相空間の分割を導入し、古典計算論の範囲でもうひとつの極限操作を考えればいいだけかもしれない。

補題？が正しいとすると、ひとつ注釈が必要である。 $\{0,1\}^*$ から Γ^* への移行にともなって、$\sum_{x:|x|=n}$ を $\int d\omega_{-n:n}$ に置き換えたが、この段階で基準となる測度をひとつ選択したことになっている。要するに、相空間上のルベーグ測度を基準にしたことになる。したがって、この段階で、等重率の原理に対する白紙からの挑戦からは後退したことになる。CA の場合には何故同じ問題が生じなかったのか、あるいは、CA の場合でも同じ問題があるのか、まだ理解していない。

4 おわりに

この講義ノートでは、平衡状態に対応するミクロ状態は何か、という問に対してできる限りの考察をした。CA に対してはもっともらしい定義を与えた。この定義を出発点にすることにより、測度の選択や不可逆性の問題などの統計力学の基礎づけを問うことができる。さらに、この定義が古典力学系に拡張できるのかどうかを検討し、補題？が成り立てば、そこからミクロなエントロピーに相当する K_Γ が定義できることを予想した。量子力学系への展開[17]はまだ考えていない。

最後に、(19) の形が Sasa-Komatsu の不可逆情報損失[18]と関係ありそうな形をしているのが気になる。操作によって平衡から非平衡へとミクロ状態が変化し、その後で平衡なミクロ状態に緩和する。K_Γ がミクロエントロピーなら、１本の軌道における最初と最後のエントロピー差は、K_Γ の差として表現される。操作によって生じるエントロピー差を１本の軌道で議論したのが Sasa-Komatsu の I だった。補題？によって K_Γ が定義されたとしても、それは分割による計算論的な量とも関係しているはずで、リアプノフ解析のようなもので捉えれる可能性があるのでないか。

謝辞: 講義ノート初稿に対して、大野克嗣氏から貴重なコメントをいただいた。感謝したい。

[15]M. B. Pour-El and J. I. Richards, Computability in Analysis and Physics, Springer, (1989)

[16]Blum, Cucker, Shub and Smale, Complexity and Real Computation, (Springer)

[17]Non-commulative Martin-Löf randomness の議論が、G. Segre, chao-dyn/9909031 にある。この論文はたまたまみつけたもので、考察が浅そうである。KS エントロピーの作用素代数的な扱いについては、ちゃんとした話しがあったはずなので、そのあたりが入口になるかもしれない。２、３年前の PRL にもあった。

[18]S. Sasa, nlin.CD/0006042; S. Sasa and T.S. Komatsu, PRL, **82**, 912-915, (1999);PTP, **103,** 1-52, (2000);

A　準備

A.1　記号

0 と 1 からなる全ての有限列の集合を $\{0,1\}^*$, 0 と 1 からなる無限列の集合を $\{0,1\}^\infty$ と書く。$x \in \{0,1\}^*$ に対して、x の長さを $|x|$ とする。$\omega \in \{0,1\}^\infty$ に対して、ω_i は ω の i 番目の数字をあらわし、$\omega_{1:n}$ を ω の最初から n 番目までの数字をとりだしたものとする。すなわち、$\omega_{1:n} = \omega_1 \cdots \omega_n$ である。

特に明示しなくても、x は $\{0,1\}^*$ の元、ω は $\{0,1\}^\infty$ の元、m, n は正の整数とする。

A.2　計算論

$\{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$ の部分集合 R を $\{0,1\}^*$ の binary relation とよぶ。$x \in \{0,1\}^*$ に対し、$(x,y) \in R$ となる高々ひとつの y があるとき、R を single valued binary relation とよぶ。$x \in \{0,1\}^*$ に対し、$(x,y) \in R$ となる y があるなら、$\phi(x) = y$, なければ、$\phi(x)$ が定義されない、とする ϕ のことを部分関数 (partial function) とよぶ。

計算機 (チューリング機械)[19]による、 入力 $x \in \{0,1\}^*$ と出力 $y \in \{0,1\}^*$ の関係は、single valued relation なので、ある部分関数を定義することができる。これを部分帰納関数 (partial recursive function) とよぶ。計算機のイメージに沿って、アルゴリズムとよぶこともある。部分帰納関数が全ての入力に対して出力値があるとき、帰納関数 (recursive function)[20]とよぶ。

集合 A が帰納関数の値域になるなら、集合 A を帰納的枚挙可能であるという。意味は明らかであろう。集合 A とその補集合がともに帰納的枚挙可能なら、集合 A を帰納的であるとよぶ。集合 A が帰納的であることと集合 A の特性関数が帰納関数であることは同値である。

$\{0,1\}^*$ と $\mathbf{N}$ には標準的な 1 ： 1 対応があるので、$\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への (部分) 帰納関数や $\{0,1\}^*$ から $\mathbf{N}$ への (部分) 帰納関数を定義することができる。同様に、$\{0,1\}^*$ から $\mathbf{Q}$ への (部分) 帰納関数を定義することができる。

$\{0,1\}^*$ から $\mathbf{R}$ への関数に関しては、帰納関数で近似列をつくれるかどうかで計算論的な概念を導入する。具体的に、$\{0,1\}^*$ から $\mathbf{R}$ への関数 f が **computable** とは、$|\mu(x) - g(x,k)| < 1/k$ となる有理数値をもつ帰納関数 $g(x,k)$ が存在することである。

$\{0,1\}^*$ から $\mathbf{R}$ への関数 f が **semicomputable (from below)**[21]とは、n に関して非減少で有理数に値をもつ帰納関数 $g(x,n)$ があって[22]、$\lim_{n\to\infty} g(x,n) = f(x)$ がなりたつことである。これは、集合 $\{(x,r) | x \in \{0,1\}^*, r \in Q, f(x) > r\}$ が帰納的枚挙可能であることと等価である。

semicomputable (from above) も同様に定義[23]できる。

A.3　測度

$\{0,1\}^\infty$ の部分集合である筒 Γ_x を

$$\Gamma_x = \{\omega | \omega_{1:n} = x, x \in \{0,1\}^*\} \tag{21}$$

[19]cf. M. Davis, Computability and Unsolvability, (Dover). の Part I
[20]total recursive function ともよぶ。
[21]enumerable function ともいう。
[22]computable real function でもよい
[23]$-f(x)$ が semicomputable (from below) であれば、$f(x)$ は semicomputable (from above) になる。

と定義する。全ての筒の集合

$$\mathcal{G} = \{\Gamma_x | x \in \{0,1\}^*\} \tag{22}$$

から実数への関数 μ で次の条件をみたすものが確率測度を与えることが知られている[24]。

$$\mu(\Gamma_\epsilon) = 1 \tag{23}$$

$$\mu(\Gamma_x) = \sum_{b\in\{0,1\}} \mu(\Gamma_{xb}) \tag{24}$$

$\{0,1\}^*$ から実数への関数 μ' を

$$\mu'(x) = \mu(\Gamma_x) \tag{25}$$

と定義すると記号が便利になる。(意味は明瞭である。μ' は x で指定された筒の測度を与える関数である。) $\{0,1\}^\infty$ 上の測度 μ をこの μ' であらわしプライムを省略してあらわすことも多い。このノートでは、μ' も μ もともに μ という記号であらわす。

定義と記号法から明らかではあるが、任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して、

$$\sum_{x:|x|=k} \mu(x) = 1 \tag{26}$$

が成り立つこともよく使う。

$x \in \{0,1\}^\infty$ に対して、$\lambda(x) = 2^{-|x|}$ とする測度が一様測度である。

B ランダムネス

$\{0,1\}^\infty$ 上の測度 μ をひとつ固定し、μ に関するランダムネスを Martin-Löf にしたがって定義する。(cf. Li-Vitány[25], p.117-120)

B.1 アイデア

無限列 $\omega \in \{0,1\}^\infty$ に対して、0 と 1 の区別なく一様ランダムになっていることの必要条件として、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \omega_{1:i} = 1 \tag{27}$$

が成立するべきである。この性質は、ω_i が公正なコインを投げた試行の結果として得られるなら確率 1 で成立することに注意したい。つまり、(27) は確率をつかって生じた典型的な性質のひとつである。この性質以外にも、公正なコイン投げに対して確率 1 で成立する性質はたくさんある。確率 1 で成立する全ての性質を満たす ω を、確率をつかって生じた典型的な結果とみなし、この ω をランダムだと考えたい。

ただし、確率 1 で成立する全ての性質を満たす ω は存在しないことはすぐにわかるので、何らかの制限を与える必要がある。Martin-Löf は、ω に対して確率 1 で成立する性質を effective に検証できるものに限定した。

ω_i が公正なコインを投げた試行の結果として得られるというのは、$\{0,1\}^\infty$ 上に一様測度 λ を仮定するのと等価である。そこでコイン投げの考えを $\{0,1\}^\infty$ 上の一般の測度 μ に拡張する。

[24]測度論の教科書
[25]M. Li and P. Vitány, An introduction to Kolmogorov complexity and its applications, Springer, (1993).

B.2 定義

有限列が確率測度 μ に関してどれくらい典型的な結果でないか、という非典型度をはかるテストを考える。それを sequential に無限大まで拡張したとき、非典型度が無限に大きくなれば、その無限列が典型的でないとして、その無限列をランダムでないと宣言する。

定義 μ を $\{0,1\}^\infty$ 上の computable な測度[26]とする。$\{0,1\}^\infty$ から $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ への関数 (total function) δ が次の 2 つの条件をみたすとき、δ は μ に関する sequential Matin-Löf (M-L) テストである。

1. $\delta(\omega) = \sup_n\{\gamma(\omega_{1:n})\}$. ただし、$\gamma$ は、$\{0,1\}^*$ から $\mathbf{N}$ へ関数で、$V = \{(m,y)|\gamma(y) \geq m\}$ が帰納的枚挙可能な集合となるようなものである。

2. 各々の $m \in \mathbf{N}$ に対して、
$$\mu\{\omega|\delta(\omega) \geq m\} \leq 2^{-m} \tag{28}$$

2. より $\delta(\omega) = \infty$ となる ω の集合の測度は 0 である。したがって、$\delta(\omega) < \infty$ となる ω の集合の測度は 1 である。また、ω に対して、$\sup_{i \leq n}\{\gamma(\omega_{1:i})\} > m$ となる (n,m) を列挙できる。その意味で、$\delta(\omega) = \infty$ かどうかを effective に検証可能である。

定義 $\delta(\omega) < \infty$ のとき、ω は M-L テスト δ に関してランダムである。

ω が (M-L) ランダムであるとは、全ての sequential M-L テストによってランダムだと判定されたときのことをいう。sequential M-L テストは可算無限個あるので、無意味な言明にも思えるが、次の定理がなりたつのでそうではない。

定理 任意の sequential M-L テスト δ に対して正の定数 c が存在し、
$$\delta_0(\omega|\mu) \geq \delta(\omega) - c \tag{29}$$
が成り立つような sequential M-L テスト $\delta_0(\cdot|\mu)$ が存在する。$\delta_0(\cdot|\mu)$ を universal sequential M-L テストとよぶ。

証明 : See Li-Vitány, p.119 .

universal sequential M-L テストをつかうことによりランダムネスの定義をすることができる。

定義 $\omega \in \{0,1\}^\infty$ が μ に関して (M-L) ランダム[27]であるとは
$$\delta_0(\omega|\mu) < \infty \tag{30}$$
が成り立つことである。

[26] μ を $\{0,1\}^*$ から実数への関数とみなしたとき、$\mu(x)$ が computable であること。

[27] ランダムネスの定義にはいくつかの流派がある。それゆえに、M-L ランダムという表現の方が誤解を招かない。

ランダムでない状態は、$\delta(\omega)=\infty$ となるテストがひとつでもあればよい。したがって、そのような状態の例をつくることは簡単である。それに対して、ランダムな状態は、universal sequential M-L テストを用いるしかなく、universal sequential M-L テストは計算可能でないので、ランダムな状態の例を計算機上で与えることはできない。また、定義から明らかなように、μ に関してほとんど全ての状態はランダムである。

C Kolmogorov complexity

定義 $\{0,1\}^*$ から $\{0,1\}^*$ への部分帰納関数で、その定義域が prefix-free になる[28]ものを prefix 部分帰納関数とよぶ。あるいは、簡単に prefix algorithm とよぶ。

定義 prefix algorithm ϕ をひとつ決める。$x \in \{0,1\}^*$ に対して、

$$K_\phi(x) = \min_{p:\phi(p)=x} |p| \tag{31}$$

と定義する。($\phi(p)=x$ となる p が存在しなければ、$K_\phi(x)=\infty$。)

定理 任意の prefix algorithm ϕ に対して、定数 c_ϕ が存在し、

$$K_U(x) \le K_\phi(x) + c_\phi \tag{32}$$

を満たす特別な prefix algorithm U が存在する。

証明 任意の prefix algorithm ϕ の p に対する作用を simulate するアルゴリズムが存在する[29]。U に対する入力として、ϕ に対するゲーデル数 $G(\phi)$[30]だけ 0 をならべた後で区切りの 1 をおき、次に p をおくものにとれる。したがって、

$$K_U(x) \le K_\phi(x) + G(\phi) + 1 \tag{33}$$

が成り立つ。$c_\phi = G(\phi)+1$ とおけばよい。 (証明おわり)

定義 K_U を (prefix) Kolmogorov complexity とよぶ。以下では、K_U を K と書く。

このとき次の補題[31]が成り立つ。

補題 $\{0,1\}^*$ から $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ への関数 f が、

$$\sum_{x\in\{0,1\}^*} 2^{-f(x)} \le 1 \tag{34}$$

を満たし、$\{(x,m) | f(x) \le m\}$ が帰納的枚挙可能だとせよ。正の定数 c が存在し、全ての x に対して

$$K(x) \le f(x) + c \tag{35}$$

[28] $\{0,1\}^*$ の部分集合 A が prefix-free とは、A の任意のふたつの要素 x, y に対して、片方が他方の initial segment にならないこと。

[29] cf. Davis

[30] 部分帰納関数の自然数による (一意的に decode できる) コード化. cf. Davis

[31] cf. Li-Vitány p.225. prefix-code と Kraft 不等式の定理の計算論版である。(講義でスケッチした) coding theorem の証明と本質的に同じである。ここでは丁寧に完全な証明を書いた。

が成り立つ。

証明

$$K_\phi(x) \le f(x) + 4 \tag{36}$$

をみたす prefix algorithm ϕ が存在することを示せば十分である。

$\{(z_t, k_t) : t = 1, 2, \cdots\}$ を $\{(x, m) | f(x) \le m\}$ の帰納的枚挙とする。ただし、重複がないように枚挙する。$z_{t'} = z_t$ なら $k_{t'} \ne k_t$ なので、固定した x に対して

$$\begin{aligned} \sum_{t:z_t=x} 2^{-k_t} &\le 2^{-f(x)}(1 + \frac{1}{2} + \cdots) && (37) \\ &= 2^{-f(x)}2 && (38) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-k_t} &= \sum_x \sum_{t:k_t=x} 2^{-k_t} && (39) \\ &= \sum_x 2^{-f(x)}2 \le 2 && (40) \end{aligned}$$

を得る。この関係を使って、(36) をみたす prefix algorithm ϕ を構成する。

$[0, 1]$ を長さ $2^{-(k_t+1)}$ の区間 I_t で左端から順に隙間のように重ならないように埋めていく。$p \in \{0, 1\}^*$ に対して、$0.p$ という実数 (の 2 進展開表示) に対応させる。$[0.p, 0.p + 2^{-|p|})$ とあらわされる区間を p に対する binary intervalJ_p とよぶ。区間 I_t の中にも含まれるもっとも大きい binary interval が J_p のとき、$\phi(p) = z_t$ と定義する。ϕ は prefix algorithm である。

x を固定する。$z_t = x$,

$$f(x) \ge k_t - 1 \tag{41}$$

を満たす t がある。その t に対し、J_p が I_t の中の最大の binary interval なら、

$$2^{-|p|}4 \ge |I_t| = 2^{-(k_t+1)} \tag{42}$$

なので

$$|p| \le k_t + 3 \tag{43}$$

が成り立つ。(41), (43) より、

$$K_\phi(x) \le |p| \le f(x) + 4 \tag{44}$$

を得る。 (証明おわり)

この補題より直ちに K の上限を得る。

定理　μ を $\{0, 1\}^\infty$ 上の computable な測度とする。定数 c があって、

$$K(x) \le -\log_2 \mu(x) + 2\log_2 |x| + c \tag{45}$$

が成り立つ。

証明

$$\sum_{x\in\{0,1\}^*}\mu(x)|x|^{-2} = \sum_n\sum_{x:|x|=n}\mu(x)|x|^{-2} \tag{46}$$
$$= \sum_n n^{-2} \tag{47}$$
$$= \frac{\pi^2}{6} \tag{48}$$

よって、

$$\frac{1}{2}\sum_{x\in\{0,1\}^*}\mu(x)|x|^{-2}\leq 1 \tag{49}$$

が成り立つ。補題により、(45) がわかる。 (証明おわり)

D ランダムネスと Kolmogorov complexity

定理[32] μ を computable な測度とする。 $\omega\in\{0,1\}^\infty$ が μ に関して (M-L) ランダムであることの必要十分条件は、正の定数 c が存在して、全ての n に対して

$$K(\omega_{1:n}) > -\log_2\mu(\omega_{1:n}) - c \tag{50}$$

が成り立つことである。

証明 (50) が必要条件であることを示す。

$$\gamma(\omega_{1:n}) = -\log_2\mu(\omega_{1:n}) - K(\omega_{1:n}) \tag{51}$$

を定義すると、

$$\{(x,m)|\gamma(x)\geq m\} \tag{52}$$

は帰納的列挙可能である。このとき、

$$\delta(\omega) = \sup_n\gamma(\omega_{1:n}) \tag{53}$$

に対して、次の評価が成り立つので、δ は recursive sequential M-L test である。

$$\mu\{\omega|\delta(\omega)\geq m\} = \mu\{\omega|\sup_n\gamma(\omega_{1:n})\geq m\} \tag{54}$$
$$= \mu\{\omega|\exists n,\gamma(\omega_{1:n})\geq m\} \tag{55}$$
$$= \sum_{x:\gamma(x)\geq m}\mu(x) \tag{56}$$
$$\leq \sum_x 2^{-(K(x)+m)} \tag{57}$$
$$\leq 2^{-m}. \tag{58}$$

[32] M. van Lambalgen, J. Symbolic logic, **52**, 725 (1989). の定理 5.1 である。証明のアイデアもその論文による。この自然な定理が、Li-Vitány にはみあたらない。Li-Vitány では、p.256 に monotone complxity を使った表現がある。ただし、一様測度に限定した定理は、p. 182-183 にある。そこの証明を一般の computable な測度 μ に拡張するとここの証明と本質的には同じになる (はず)。

ω が M-L ランダムならば、$\delta(\omega) < \infty$ なので、全ての n に対して

$$\gamma(\omega_{1:n}) < c \tag{59}$$

となる正の数 c がある。したがって、(50) が必要条件であることがわかった。

(50) が十分条件であることを示す。universal sequential test δ_0 に対応する M-L test を γ_0 とする。$\delta_0(\omega) = \infty$ というのは、任意の m に対して n があって、$\gamma_0(\omega_{1:n}) \geq m$ になることと同値である。このことを踏まえて、$\{0,1\}^\infty$ の部分集合

$$V_m = \{x | \gamma_0(x) \geq m\} \tag{60}$$

を定義する。δ_0 が sequntial M-L テストなので、

$$\mu\{\omega | \exists n, \omega_{1:n} \in V_m\} \leq 2^{-m} \tag{61}$$

が成り立つ。この式を

$$\sum_{x \in V_m} \mu(x) \leq 2^{-m} \tag{62}$$

と書き直すと、

$$\frac{1}{4} \sum_m \sum_{x \in V_m} \mu(x) 2^{m/2} \leq 1 \tag{63}$$

を得る。

$$f(x) = -\log_2 \mu(x) - m/2 + 2 \text{ for } x \in V_m \tag{64}$$

$$= \infty \text{ for } x \notin V_m \tag{65}$$

を定義して、Appendix C の補題を使うと、$x \in V_m$ のとき

$$K(x) \leq -\log_2 \mu(x) - m/2 + 2 + c \tag{66}$$

を得る。一方、ω がランダムでないなら、任意の m に対して、n があって、

$$\omega_{1:n} \in V_m \tag{67}$$

とかける。したがって、ω がランダムでないなら、任意の m に対して、n があって、

$$K(\omega_{1:n}) \leq -\log_2 \mu(\omega_{1:n}) - m/2 + 2 + c \tag{68}$$

が成り立つ。対偶をとることにより、正の定数 c があって、任意の n に対して

$$K(\omega_{1:n}) > -\log_2 \mu(\omega_{1:n}) - c \tag{69}$$

ならば、ω はランダムである。 (証明おわり)

この定理よりランダムな ω に対する K の漸近形をえる。

定理 ω が μ に関して (M-L) ランダムならば、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} K(\omega_{1:n}) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 \mu(\omega_{1:n}) \tag{70}$$

証明 ω がランダムならば、正の定数 c, c' があって、全ての n に対して

$$-\log_2 \mu(\omega_{1:n}) - c \leq K(\omega_{1:n}) \leq -\log_2 \mu(\omega_{1:n}) + 2\log_2 n + c' \tag{71}$$

が成り立つことよりわかる。 (証明おわり)

E　Brundno の定理

$\{0,1\}^\infty$ から $\{0,1\}^\infty$ への写像 T を $(T\omega)_n = \omega_{n+1}$ で定義する。全てのボレル集合に対して $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ がなりたつとき μ は T に関して定常だという。(CA の場合には、空間並進対称になる。) $T^{-1}A = A$ ならば、$\mu(A) = 0$ または $\mu(A) = 1$ が成り立つとき、μ は写像 T に関してエルゴード的だという。

定理 μ を写像 T に関してエルゴード的な定常測度だとせよ。μ に関して確率 1 で、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} K(\omega_{1:n}) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{x:|x|=n} \mu(x) \log_2 \mu(x) \tag{72}$$

が成り立つ。

Brudno はこの等式[33] を可測空間上の一般的な写像 T に関する測度論的エントロピーと軌道の複雑さの関係としてエルゴード性の条件だけで示した。一般的な証明は容易ではないが、μ を computablae な測度だと仮定すると、(70) からほぼ自明である。ここでは、Apendix D の結果を直接つかわずに、μ が computable だという仮定のもとで、Brundno の定理を証明する。

証明 m を固定すると、

$$\begin{aligned}
& \mu\{\omega | \exists n \ \ -K(\omega_{1:n}) - \log_2 \mu(\omega_{1:n}) \geq m\} & (73)\\
= & \sum_{x:K(x)+\log_2 \mu(x) \leq -m} \mu(x) & (74)\\
\leq & \sum_x 2^{-(K(x)+m)} & (75)\\
\leq & \ 2^{-m} & (76)
\end{aligned}$$

が成り立つ。これより、

$$\begin{aligned}
& \mu\{\omega | \forall m \exists n \ \ -K(\omega_{1:n}) - \log_2 \mu(\omega_{1:n}) \geq m\} & (77)\\
= & \lim_{m\to\infty} \mu\{\omega | \exists n \ \ -K(\omega_{1:n}) - \log_2 \mu(\omega_{1:n}) \geq m\} & (78)\\
\leq & \lim_{m\to\infty} 2^{-m} = 0 & (79)
\end{aligned}$$

を得る。つまり、

$$\mu\{\omega | \exists m \ \forall n \ \ -K(\omega_{1:n}) - \log_2 \mu(\omega_{1:n}) < m\} = 1 \tag{80}$$

したがって、Appendix C の定理 (45) と併せて、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} K(\omega_{1:n}) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 \mu(\omega_{1:n}) \tag{81}$$

が確率 1 で成り立つ。μ が T に関してエルゴード的な定常測度なので、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 \mu(\omega_{1:n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{x:|x|=n} \mu(x) \log_2 \mu(x) \tag{82}$$

が確率 1 で成り立つ[34]。よって、μ が computable という条件つきで、Brundno の定理が証明された。
(証明おわり)

[33] A. A. Brundo, Trans. Moscow. Math. Soc. 44 127 (1983).

[34] Shannon-McMillan-Breiman theorem. cf R. Durrett, Probability: Theory and Example, (Duxbury Press, 1996). p. 357

F $\mathbf{R}^d$ 上連続関数の計算可能性

計算論では、$\{0,1\}^*$ から $\{0,1\}^*$ への関数が基本的な対象である。$\{0,1\}^*$ から実数への関数 f に関しては、recursive 関数で effective に近似できるものが computable であり、computable な測度 $\mu(x)$ がその例だった。また、片側からの単調近似列をつくれるのが semicomputable だった。

実数を変数とする連続関数の計算可能性については、いくつかのアプローチがあるようだ。直観的にわかりやすいのは、計算可能な連続関数を有理係数多項式の effective な近似列であたえる[35]ことである。

定義 $\mathbf{R}^d$ から $\mathbf{R}$ への関数が computable とは、有理係数多項式の computable 系列 $\{p(x,m,M)\}$ と $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への recursive functionϕ があって、全ての N, M に対して、

$$m \geq \phi(N,M) \Rightarrow \sup_x |f(x) - p(x,m,M)| \leq 2^N \quad \text{for all} \quad x \in I_M^d \tag{83}$$

が成り立つことである。ここで、

$$I_M^d = \{x \in \mathbf{R}^d | -M \leq x_i \leq M, 1 \leq i \leq d\}. \tag{84}$$

この定義と他の定義との関係は Pour-El を参照。(直観的には全くわからないが)、Kleene らの recursive functional[36] との等価性も示されているらしい。

Pour-El には書かれていないが、semi-computable (from above) な連続関数を次のように定義するのは自然だと思う。

定義 $\mathbf{R}^d$ から $\mathbf{R}$ への関数が semicomputable (from above) とは、non-increasing な有理多項式の computable な系列 $\{p(x,m)\}$ と $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への帰納関数 $M(m)$ があって、

$$\lim_{m\to\infty} p(x,m) = f(x) \quad \text{for all} \quad x \in I_{M(m)}^d \tag{85}$$

が成り立つことである。

$\mathbf{R}^* = \cup\mathbf{R}^d$ から $\mathbf{R}$ への semicomputable (from above) な関数を定義するのは容易である。

[35] Pour-El, p.26

[36] 実数は $\{0,1\}^*$ から $\{0,1\}^*$ への関数と 1 ： 1 対応がある。そこで、「$\{0,1\}^*$ から $\{0,1\}^*$ への関数」の集合から、「$\{0,1\}^*$ から $\{0,1\}^*$ への関数」の集合への関数を考えると、実数から実数への関数を考えることができる。Davis, p.162